2.6 渐近线与曲率线

曲面$S: \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,v)$上给定点$P_0$处使法曲率$\kappa_n = 0$的切方向称为曲面在$P_0$点处的**渐近方向**. 设$\boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{r}_u + \mu \boldsymbol{r}_v \in T_{P_0}S$, 则

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}\text{是渐近方向} &\Longleftrightarrow \kappa_n(\boldsymbol{v}) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \mathcal{W}(\boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{v} = 0 \\ &\Longleftrightarrow L\lambda^2 + 2M\lambda\mu + N\mu^2 = 0. \end{aligned}$$

由κ_n的几何意义, 沿渐近方向曲面无弯曲, 与切平面最贴近.

显然, 平面上一点处任意方向都是渐近方向, 而球面上任何点处均无渐近方向. 一般地, 曲面S上P_0点处的一个方向$\boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{r}_u + \mu \boldsymbol{r}_v$是一个渐近方向当且仅当

$$L_0\lambda^2 + 2M_0\lambda\mu + N_0\mu^2 = 0, \tag{6.1}$$

其中L_0, M_0, N_0是S在P_0点处的第二类基本量. 所以, 我们总有

当$L_0N_0 - M_0^2 > 0$时, 即椭圆点处, 无(实)渐近方向,

当$L_0N_0 - M_0^2 < 0$时, 即双曲点处, 有两个(实)渐近方向,

当$L_0N_0 - M_0^2 = 0$时, 即抛物点处(平点除外), 有一个(实)渐近方向,

当$L_0 = M_0 = N_0 = 0$时, 即平点处, 任何方向都是渐近方向.

若曲面上一条曲线在每点处的切方向都是曲面的渐近方向, 则称此曲线为曲面的**渐近曲线**, 简称**渐近线**. 其几何意义表现为沿这样的曲线, 曲面是无弯曲的. 例如, 平面上任何正则曲线都是渐近线, 而球面上无渐近线. 一般地, 曲面上渐近曲线的微分方程是

$$Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2 = 0. \tag{6.2}$$

特别地, 如果在曲面上处处成立$LN - M^2 < 0$, 则在曲面上存在两个处处线性无关的渐近方向场, 于是存在由渐近曲线构成的**渐近曲线网**.

定理 6.1 在只含双曲点的正则参数曲面上, 参数曲线网成为渐近曲线网的必要充分条件是$L = N = 0$.

证明 ($\Longrightarrow$) 由参数曲线网的微分方程 $dudv=0$ 及渐近线的微分方程 (6.2), 若 u-线为渐近线, 则 $Ldu^2=0$, 即 $L=0$; 同样若 v-线为渐近线, 则 $Ndv^2=0$, 即 $N=0$. 因此当参数曲线网成为渐近线网时, 必有 $L=N=0$.

($\Longleftarrow$) 若 $L=N=0$, 则渐近线网的微分方程 (6.2) 简化为 $Mdudv=0$. 而 $M\neq 0$ (否则曲面上含平点), 因此 $dudv=0$, 即渐近线网是参数曲线网. □

曲面 S 上一条曲线 C 称为**曲率线**, 如果 C 在每一点的切方向都是主方向. 由定义可见, 曲率线是曲面 S 上主方向场的积分曲线, 这样的曲线描出了曲面上弯曲最大或最小的痕迹. 根据上一节主方向的方程 (5.11) 知, 曲率线的微分方程为

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -dudv & du^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0. \tag{6.3}$$

设曲面 S 上的一条曲线 C 的参数方程是 $u=u(t),\ v=v(t)$, 按曲率线定义, 曲线 C 是曲面 S 上曲率线的条件是

$$\mathcal{W}\left(\frac{d\boldsymbol{r}(u(t),v(t))}{dt}\right)=\kappa_n\frac{d\boldsymbol{r}(u(t),v(t))}{dt}.$$

其中 κ_n 是曲线 C 的法曲率. 再由 Weingarten 变换的定义得知

$$\mathcal{W}\left(\frac{d\boldsymbol{r}(u(t),v(t))}{dt}\right)=-\frac{d\boldsymbol{n}(u(t),v(t))}{dt}.$$

由此得到曲线 C 是曲面 S 上曲率线的判别准则:

定理 6.2 (Rodriques) 曲面 $S:\ \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$ 上的一条曲线 $C:\ u=u(t),\ v=v(t)$ 是曲率线的充分必要条件是, 曲面 S 沿曲线 C 的法向量场 $\boldsymbol{n}(u(t),v(t))$ 沿曲线 C 的导数与曲线 C 相切, 即

$$\frac{d\boldsymbol{n}(u(t),v(t))}{dt}\parallel\frac{d\boldsymbol{r}(u(t),v(t))}{dt}.$$

定理 6.3 在不含脐点的曲面上, 参数曲线网是曲率线网的充分必要条件是 $F=M=0$. 此时, 沿 u-线方向的主曲率为 $\kappa_1=\frac{L}{E}$, 沿 v-线方向的主曲

率为 $\kappa_2 = \frac{N}{G}$, 并且曲面的两个基本形式可同时对角化成

$$I = Edu^2 + Gdv^2,$$
$$II = \kappa_1 Edu^2 + \kappa_2 Gdv^2.$$

证明 (必要性) 设参数曲线网是曲率线网, 由主方向的正交性知 $F = 0$. 因此由 $d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_u du + \boldsymbol{r}_v dv$ 得到

$$I = d\boldsymbol{r} \cdot d\boldsymbol{r} = Edu^2 + Gdv^2.$$

又因为 $\boldsymbol{r}_u$ 和 $\boldsymbol{r}_v$ 为主方向, 所以 $\mathcal{W}(\boldsymbol{r}_u) = \kappa_1 \boldsymbol{r}_u$, $\mathcal{W}(\boldsymbol{r}_v) = \kappa_2 \boldsymbol{r}_v$, 其中 κ_1, κ_2 为相应的主曲率, 于是

$$\begin{aligned} II &= \mathcal{W}(d\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} \\ &= (\kappa_1 \boldsymbol{r}_u du + \kappa_2 \boldsymbol{r}_v dv) \cdot (\boldsymbol{r}_u du + \boldsymbol{r}_v dv) \\ &= \kappa_1 Edu^2 + \kappa_2 Gdv^2, \end{aligned}$$

即

$$L = \kappa_1 E, \quad M = 0, \quad N = \kappa_2 G,$$

这是, u-线和 v-线方向的主曲率分别为

$$\kappa_1 = \frac{L}{E}, \quad \kappa_2 = \frac{N}{G}.$$

(充分性) 若 $F = M = 0$, 则曲率线的微分方程 (6.3) 约化为

$$(EN - GL)dudv = 0.$$

如果曲面上无脐点, 则 $EN - GL \neq 0$ (否则结合 $F = M = 0$ 就得到了脐点的条件), 从而 $dudv = 0$, 由此可见 $u =$ 常数, 或 $v =$ 常数都是曲率线, 即两族参数曲线均为曲率线. □

习题 2–6

1. 证明: 正螺面 $\boldsymbol{r}(u, v) = (u\cos v, u\sin v, bv)$ 上有两族渐近曲线, 一族为直母线, 另一族为螺旋线.

【证明】 直接计算可以得到正螺面的第二基本型

$$I\!I=-\frac{2b}{\sqrt{u^2+b^2}}dudv,$$

这时, 正螺面上处处有 $LN-M^2<0$, 所以其上有且仅有两族渐近曲线. 另一方面, 由于 $L=N=0$, 故坐标网成为渐近网, 显然可见 u-线是直母线, 而 v-线是螺旋线.

2. 求曲面 $z=xy^2$ 的渐近网.

【解】 所给曲面的参数方程可写成 $\boldsymbol{r}(x,y)=(x,y,xy^2)$, 简单计算可求出它的第二类基本量为

$$L=0,\quad M=\frac{2y}{\sqrt{1+4x^2y^2+y^4}},\quad N=\frac{2x}{\sqrt{1+4x^2y^2+y^4}}.$$

于是渐近曲线的微分方程 $Ldx^2+2Mdxdy+Ndy^2=0$ 即为

$$dy(4ydx+2xdy)=0.$$

若 $dy=0$, 则 $y=C_1$ (常数);

若 $4ydx+2xdy=0$, 即 $\frac{2}{x}dx+\frac{1}{y}dy=0$, 则 $x^2y=C_2$ (常数).

3. 证明每一条曲线在它的主法线曲面上是渐近曲线.

【证明】 设曲线 C 的自然参数方程为 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$, 则其主法线曲面 Σ 的参数方程为

$$\boldsymbol{r}^*(s,v)=\boldsymbol{r}(s)+v\boldsymbol{N}(s).$$

所以

$$\boldsymbol{r}^*_s=\boldsymbol{T}+v(-\kappa\boldsymbol{T}+\tau\boldsymbol{B}),\quad \boldsymbol{r}^*_v=\boldsymbol{N},$$
$$\boldsymbol{r}^*_s\times\boldsymbol{r}^*_v=(1-v\kappa)\boldsymbol{B}-v\tau\boldsymbol{T}.$$

因为曲线 C 为曲面 Σ 上的一条参数曲线 $(v=0)$, 故沿曲线 C 曲面 Σ 的法向量 $\boldsymbol{n}\parallel\boldsymbol{r}^*_s\times\boldsymbol{r}^*_v\parallel\boldsymbol{B}$, 即 C 的密切平面与 Σ 的切平面重合, 因此 $\theta=\angle(\boldsymbol{n},\boldsymbol{N})=\frac{\pi}{2}$. 则 $\kappa_n=\kappa\cos\theta=0$ 说明 C 为 Σ 的渐近曲线.

4. 证明: 曲线 C 为曲面上渐近曲线的充要条件是: C 为直线; 或者 C 的密切平面与曲面在该点处的切平面重合.

证明 $(\Longrightarrow)$ 由公式 $\kappa_n=\kappa\cos\angle(\boldsymbol{n},\boldsymbol{N})$, 当 $\kappa_n=0$ 时, 注意到 $\kappa\neq0$, 因此

$$\angle(\boldsymbol{n},\boldsymbol{N})=\frac{\pi}{2},$$

即曲线在每点处的密切平面与曲面在该点处的切平面重合.

$(\Longleftarrow)$ 若曲面上曲线 C 的密切平面与曲面的切平面重合, 则 $\boldsymbol{B}\parallel\boldsymbol{n}$, 而 $\boldsymbol{B}\perp\boldsymbol{N}$, 故 $\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{N}$, 即

$$\angle(\boldsymbol{n},\boldsymbol{N})=\frac{\pi}{2},$$

因此沿 C 有 $\kappa_n = \kappa \cos \angle(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{N}) = 0$, 换句话说, C 为渐近曲线.

5. 曲面 S 上曲线 C 为曲率线当且仅当沿曲线 C 曲面 S 的法线构成一可展曲面.

【证明】 $(\Rightarrow)$ 设 $C: \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ 为 S 上的曲率线, 则由 Rodrigues 公式知, 沿曲线 C 成立 $d\boldsymbol{n} = -\kappa_n d\boldsymbol{r}$, 而 S 的沿 C 的法线曲面的参数方程为 $\boldsymbol{r}(t) + v\boldsymbol{n}(t)$, 所以

$$(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{n}, \boldsymbol{n}') = (\boldsymbol{r}', \boldsymbol{n}, -\kappa_n \boldsymbol{r}') = 0,$$

因此法线曲面为可展曲面.

$(\Leftarrow)$ 若 S 的沿 C 的法线曲面 $\boldsymbol{r}(t, v) = \boldsymbol{r}(t) + v\boldsymbol{n}(t)$ 可展, 则

$$(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{n}, \boldsymbol{n}') = 0,$$

因此存在不同时为 0 的实函数 $a(t), b(t), c(t)$, 使成立

$$a\boldsymbol{r}' + b\boldsymbol{n} + c\boldsymbol{n}' = 0,$$

两边与 $\boldsymbol{n}$ 内积, 得 $b = 0$. 这时 $a(t), c(t)$ 不同时为零, 于是 $d\boldsymbol{r} \parallel d\boldsymbol{n}$, 由 Rodrigues 公式, C 为曲率线.