2.5 主曲率 Gauss曲率 平均曲率及其计算

根据线性代数理论, 从一个二维内积空间到它自身的自共扼线性变换恰好有两个实特征值(这两个实特征值可能相等), 并且相应地有两个正交的实特征向量. 由此可见, 曲面在每一点的Weingarten变换作为曲面切平面到自身的一个自共扼线性变换必定有两个特征值, 并且不管那两个特征值是否相等, 相应地总有两个彼此正交的特征方向.

设$P \in S$, $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$是P点的切平面中Weingarten变换的两个相互正交的单位特征向量, 其特征值分别为κ_1, κ_2, 即

$$\begin{cases} \mathcal{W}(\boldsymbol{v}_1) = \kappa_1 \boldsymbol{v}_1, \\ \mathcal{W}(\boldsymbol{v}_2) = \kappa_2 \boldsymbol{v}_2. \end{cases}$$

于是, 沿$\boldsymbol{v}_1$和$\boldsymbol{v}_2$方向的法曲率分别为

$$\kappa_n(\boldsymbol{v}_1) = \frac{\mathcal{W}(\boldsymbol{v}_1)\cdot\boldsymbol{v}_1}{\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_1} = \frac{\kappa_1(\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_1)}{\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_1} = \kappa_1,$$
$$\kappa_n(\boldsymbol{v}_2) = \frac{\mathcal{W}(\boldsymbol{v}_2)\cdot\boldsymbol{v}_2}{\boldsymbol{v}_2\cdot\boldsymbol{v}_2} = \frac{\kappa_2(\boldsymbol{v}_2\cdot\boldsymbol{v}_2)}{\boldsymbol{v}_2\cdot\boldsymbol{v}_2} = \kappa_2.$$

这样, 就得到了Weingarten变换的特征值的几何意义: Weingarten变换的特征值等于其相应特征方向的法曲率.

我们把Weingarten变换在点P的两个特征值κ_1, κ_2称为曲面在点P的**主曲率**, 特征值κ_1, κ_2对应的两个实特征方向称为曲面在点P的**主方向**. 由线性代数理论我们知道, 当这两个实特征值不相等时, 对应的实特征方向是完全确定的, 并且它们彼此正交; 如果这两个实特征值相等, 则主方向不能唯一确定, 这时曲面在该点的任意一个切方向都是主方向.

下面得到的Euler公式将表明法曲率随方向而变化的变化规律, 亦即法曲率和主曲率的关系.

定理 5.1 (Euler公式) 设κ_1, κ_2是曲面在P点处的两个主曲率, $\boldsymbol{e}_1, e_2$是相应的正交主方向的单位向量. 对任一$\boldsymbol{v} \in T_PS$, 若$\boldsymbol{v}$与$\boldsymbol{e}_1$的夹角记为θ, 则曲面在P点沿$\boldsymbol{v}$方向的法曲率为

$$\kappa_n(\boldsymbol{v}) = \kappa_1\cos^2\theta + \kappa_2\sin^2\theta. \tag{5.1}$$

证明 按主方向的定义, $\mathcal{W}(\boldsymbol{e}_i)=\kappa_i\boldsymbol{e}_i,\ i=1,2$. 由于$\boldsymbol{e}_1,e_2$是正交向量, 可设$\boldsymbol{v}=|\boldsymbol{v}|(\cos\theta\boldsymbol{e}_1+\sin\theta\boldsymbol{e}_2)$, 于是, 沿$\boldsymbol{v}$方向的法曲率

$$\begin{aligned}\kappa_n(\boldsymbol{v})&=\frac{\mathcal{W}(\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{v}}{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}}=(\mathcal{W}(\cos\theta\boldsymbol{e}_1+\sin\theta\boldsymbol{e}_2))\cdot(\cos\theta\boldsymbol{e}_1+\sin\theta\boldsymbol{e}_2)\\&=(\cos\theta\kappa_1\boldsymbol{e}_1+\sin\theta\kappa_2\boldsymbol{e}_2)\cdot(\cos\theta\boldsymbol{e}_1+\sin\theta\boldsymbol{e}_2)\\&=\kappa_1\cos^2\theta+\kappa_2\sin^2\theta.\end{aligned}$$

□

当$\kappa_1=\kappa_2$时, 由Euler公式, 对任意的切方向$\boldsymbol{v}=\lambda\boldsymbol{r}_u+\mu\boldsymbol{r}_v$都有$\kappa_n(\boldsymbol{v})=\kappa_1=\kappa_2$, 这正是主方向不确定的情形, 我们把这样的点称为曲面的**脐点**. 由于在脐点, 法曲率

$$\kappa_n(\boldsymbol{v})=\frac{\lambda^2L+2\lambda\mu M+\mu^2N}{\lambda^2E+2\lambda\mu F+\mu^2G}$$

与切方向$\boldsymbol{v}$无关, 即

$$(L-\kappa_nE)\lambda^2+2(M-\kappa_nF)\lambda\mu+(N-\kappa_nG)\mu^2=0$$

是关于$\boldsymbol{v}$的分量λ, μ的恒等式, 所以在该点有

$$\frac{L}{E}=\frac{M}{F}=\frac{N}{G}. \tag{5.2}$$

由此可见, 脐点是曲面上第一类基本量和第二类基本量成比例的点. 如果这个比例是零, 则$L=M=N=0$, 称该脐点是**平点**, 否则称该脐点是**圆点**. 直观地讲, 曲面在脐点处沿任何方向的弯曲程度都是一样的.

当$\kappa_1\neq\kappa_2$时, 即在非脐点处, 下面推论说明主曲率的几何意义.

推论 5.2 曲面在非脐点处的主曲率是曲面在这点沿所有方向的法曲率中的最大值和最小值.

证明 设κ_1, κ_2是任一非脐点处的两个主曲率, 不妨设$\kappa_1<\kappa_2$. 对任意$\boldsymbol{v}\in T_PS$, 由Euler公式

$$\begin{aligned}\kappa_n(\boldsymbol{v})&=\kappa_1\cos^2\theta+\kappa_2\sin^2\theta\\&=\kappa_1\cos^2\theta+\kappa_2(1-\cos^2\theta)\\&=\kappa_2+(\kappa_1-\kappa_2)\cos^2\theta,\end{aligned}$$

所以

$$\kappa_2 - \kappa_n(\boldsymbol{v}) = (\kappa_2 - \kappa_1)\cos^2\theta \geq 0, \quad \text{即} \quad \kappa_2 \geq \kappa_n(\boldsymbol{v}),$$

同样的方法, 可以证明 $\kappa_n(\boldsymbol{v}) \geq \kappa_1$, 即

$$\kappa_1 \leq \kappa_n(\boldsymbol{v}) \leq \kappa_2,$$

这就是说, 主曲率是法曲率的最大值和最小值. □

以上我们定义了曲面的主曲率, 并给出了其几何意义. 剩下的问题便是主曲率的计算. 由于主曲率和相应的主方向定义为Weingarten变换的特征值和特征方向, 因此, 主曲率的计算问题归结为求Weingarten变换的特征值和特征方向. 我们首先要求Weingarten变换在切平面基底下的系数矩阵.

设在切平面的基底 $\{\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v\}$ 下Weingarten变换的系数矩阵是 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, 即有

$$\mathcal{W}(\boldsymbol{r}_u) = -\boldsymbol{n}_u = a\boldsymbol{r}_u + b\boldsymbol{r}_v, \tag{5.3}$$

$$\mathcal{W}(\boldsymbol{r}_v) = -\boldsymbol{n}_v = c\boldsymbol{r}_u + d\boldsymbol{r}_v, \tag{5.4}$$

将(5.3)式分别与 $\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v$ 作内积, 得到

$$\begin{cases} L = aE + bF, \\ M = aF + bG. \end{cases}$$

求解上述线性方程组, 得

$$a = \frac{LG - MF}{EG - F^2}, \quad b = \frac{ME - LF}{EG - F^2}.$$

类似地将(5.4)式分别与 $\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v$ 作内积, 得

$$\begin{cases} M = cE + dF, \\ N = cF + dG. \end{cases}$$

求解得

$$c = \frac{MG - NF}{EG - F^2}, \quad d = \frac{NE - MF}{EG - F^2}.$$

所以Weingarten变换在基底$\{\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v\}$下的系数矩阵为

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{EG-F^2}\begin{pmatrix} LG-MF & ME-LF \\ MG-NF & NE-MF \end{pmatrix}. \tag{5.5}$$

于是,

$$\begin{aligned} & \kappa\,\text{是Weingarten变换的特征值} \\ \Longleftrightarrow\ & \begin{vmatrix} \kappa-a & -b \\ -c & \kappa-d \end{vmatrix} = 0 \\ \Longleftrightarrow\ & \begin{vmatrix} \kappa-\frac{LG-MF}{EG-F^2} & -\frac{ME-LF}{EG-F^2} \\ -\frac{MG-NF}{EG-F^2} & \kappa-\frac{NE-MF}{EG-F^2} \end{vmatrix} = 0 \\ \Longleftrightarrow\ & \kappa^2 - \frac{LG-2MF+NE}{EG-F^2}\kappa + \frac{LN-M^2}{EG-F^2} = 0. \end{aligned}$$

由此可见, 求解主曲率的问题最终归结为求解如下关于κ的一元二次方程:

$$\kappa^2 - \frac{LG-2MF+NE}{EG-F^2}\kappa + \frac{LN-M^2}{EG-F^2} = 0. \tag{5.6}$$

等价地, 方程(5.6)有时也被改写成下面易于记忆的形式:

$$\begin{vmatrix} L-\kappa E & M-\kappa F \\ M-\kappa F & N-\kappa G \end{vmatrix} = 0. \tag{5.7}$$

注 1 二次方程(5.6)的判别式可以改写成

$$\begin{aligned} \Delta &= (EN-2FM+GL)^2 - 4(EG-F^2)(LN-M^2) \\ &= \left[(EN-GL) - \frac{2F}{E}(EM-FL)\right]^2 + \frac{4(EG-F^2)}{E^2}(EM-FL)^2 \\ &\geq 0. \end{aligned} \tag{5.8}$$

等号成立当且仅当$L:M:N=E:F:G$, 即在脐点处.

现在我们来分析主方向应满足的方程. 假定$\boldsymbol{v}=\xi\boldsymbol{r}_u+\mu\boldsymbol{r}_v$是曲面在点$(u,v)$的一个主方向, 即$(\xi,\mu)\neq 0$, 并且有实数$\kappa$使得$\mathcal{W}(\boldsymbol{v})=\kappa\boldsymbol{v}$, 展开即是

$$-(\xi\boldsymbol{n}_u+\mu\boldsymbol{n}_v) = \kappa(\xi\boldsymbol{r}_u+\mu\boldsymbol{r}_v)$$

将上式分别与切向量$\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v$作内积, 得到

$$\begin{cases} L\xi + M\mu = \kappa(E\xi + F\mu), \\ M\xi + N\mu = \kappa(F\xi + G\mu), \end{cases} \tag{5.9}$$

因此

$$\kappa = \frac{L\xi + M\mu}{E\xi + F\mu} = \frac{M\xi + N\mu}{F\xi + G\mu},$$

上式说明, 主方向(ξ, μ)必须满足方程

$$\begin{vmatrix} L\xi + M\mu & E\xi + F\mu \\ M\xi + N\mu & F\xi + G\mu \end{vmatrix} = 0. \tag{5.10}$$

等价地可以写成下面便于记忆的形式:

$$\begin{vmatrix} \mu^2 & -\xi\mu & \xi^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0. \tag{5.11}$$

注 2 从方程(5.9)中消去ξ, μ便可以得到主曲率应满足的方程(5.7).

现在我们根据主曲率来定义曲面的两个重要的曲率—Gauss曲率和平均曲率. 记方程(5.6)的两个根, 即两个主曲率为κ_1, κ_2. 我们把$H = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2)$称为曲面的**平均曲率**, $K = \kappa_1\kappa_2$称为曲面的**Gauss曲率**. 由根与系数的关系有

$$H = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2) = \frac{LG - 2MF + NE}{2(EG - F^2)}, \tag{5.12}$$

$$K = \kappa_1\kappa_2 = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}. \tag{5.13}$$

以下来解释Gauss曲率的几何意义(至于平均曲率的几何意义则留在本章第七节给出). 设曲面的参数表示为$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$, 它在每一点有一个确定的单位法向量

$$\boldsymbol{n}(u, v) = \frac{\boldsymbol{r}_u(u, v) \times \boldsymbol{r}_v(u, v)}{|\boldsymbol{r}_u(u, v) \times \boldsymbol{r}_v(u, v)|}.$$

平行移动 $\boldsymbol{n}(u,v)$ 使之起点落在原点 O, 则 $\boldsymbol{n}(u,v)$ 的终点就落在 $\mathbb{R}^3$ 的单位球面 S^2 上. 这样就得到一个映射

$$\begin{aligned} g: \quad & S \to S^2 \\ & \boldsymbol{r}(u,v) \mapsto \boldsymbol{n}(u,v), \end{aligned} \tag{5.14}$$

称为曲面的**Gauss 映射**. 从 (5.3), (5.4) 式得到

$$\boldsymbol{n}_u \times \boldsymbol{n}_v = (ad-bc)\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v = K\,\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v,$$

因此

$$|\boldsymbol{n}_u \times \boldsymbol{n}_v| = |K| \cdot |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|. \tag{5.15}$$

面积元素 $dA = |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v| dudv$ 是曲面 S 上由参数 $u \to u+du$, $v \to v+dv$ 所围成的小平行四边形的面积, 它在 Gauss 映射下的像的面积是 $d\sigma = |\boldsymbol{n}_u \times \boldsymbol{n}_v| dudv$, 因此 (5.15) 式即为

$$d\sigma = |K| dA. \tag{5.16}$$

如果 $\mathscr{D}$ 是曲面上围绕点 P 的一个邻域, 它在 Gauss 映射下的像 $g(\mathscr{D})$ 的面积是

$$\operatorname{area}(g(\mathscr{D})) = \int_{g(\mathscr{D})} d\sigma = \int_{\mathscr{D}} |K| dA.$$

利用重积分中值定理, 并且让区域 $\mathscr{D}$ 收缩于点 P 取极限得到

$$|K(P)| = \lim_{\mathscr{D} \to P} \frac{\operatorname{area}(g(\mathscr{D}))}{\operatorname{area}(\mathscr{D})}. \tag{5.17}$$

由此可见, 曲面在点 P 的 Gauss 曲率的绝对值 $|K(P)|$ 是: 围绕点 P 的小区域 $\mathscr{D}$ 在 Gauss 映射下的像 $g(\mathscr{D})$ 的面积与区域 $\mathscr{D}$ 的面积之比当区域 $\mathscr{D}$ 收缩到点 P 时的极限.

习题 2–5

1. 求螺面 $\boldsymbol{r}(u,v) = (u\cos v, u\sin v, bv)$ 的主曲率, Gauss 曲率和平均曲率.

【解】 直接计算得到螺面的第一和第二基本形式如下

$$I = du^2 + (u^2 + b^2)dv^2,$$
$$II = \frac{-2b}{\sqrt{u^2 + b^2}}dudv,$$

可见 $L : M : N \neq E : F : G$, 由此便知正螺面上所有点都非脐点, 于是其上每点处都有两个不相等的主曲率. 将基本量代入主曲率的方程, 得到

$$(u^2 + b^2)\kappa^2 - \frac{b^2}{u^2 + b^2} = 0,$$

于是, 螺面的主曲率 κ_1, κ_2, Gauss 曲率 K 和平均曲率 H 分别为

$$\kappa_1 = \frac{b}{u^2 + b^2}, \quad \kappa_2 = \frac{-b}{u^2 + b^2},$$

$$K = \kappa_1 \cdot \kappa_2 = \frac{-b^2}{(u^2 + b^2)^2},$$
$$H = (\kappa_1 + \kappa_2)/2 = 0.$$

2. 设 $C : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$ 是一条空间正则曲线, 其切线构成的曲面为 $S : \boldsymbol{r}(s, t) = \boldsymbol{r}(s) + t\boldsymbol{T}$, 其中 $\boldsymbol{T}$ 是 C 的单位切向量. 求 S 的 Gauss 曲率.

【解】 记曲线 C 的曲率和挠率分别为 κ, τ, 基本向量为 $\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B}$, 则

$$\boldsymbol{r}_t = \boldsymbol{T}, \quad \boldsymbol{r}_s = \boldsymbol{T} + t\kappa\boldsymbol{N},$$

于是

$$E = \boldsymbol{r}_t^2 = 1, \quad F = \boldsymbol{r}_t \cdot \boldsymbol{r}_s = 1, \quad G = \boldsymbol{r}_s^2 = 1 + t^2\kappa^2,$$

进一步计算得到

$$\boldsymbol{r}_{tt} = 0, \quad \boldsymbol{r}_{ts} = k\boldsymbol{N},$$
$$\boldsymbol{r}_{ss} = -t\kappa^2\boldsymbol{T} + (\kappa + t\kappa')\boldsymbol{N} + t\kappa\tau\boldsymbol{B}, \quad \boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{r}_t \times \boldsymbol{r}_s}{|\boldsymbol{r}_t \times \boldsymbol{r}_s|} = \boldsymbol{B},$$

所以

$$L = \boldsymbol{r}_{tt} \cdot \boldsymbol{n} = 0, \quad M = \boldsymbol{r}_{ts} \cdot \boldsymbol{n} = 0, \quad N = \boldsymbol{r}_{ss} \cdot \boldsymbol{n} = t\kappa\tau,$$

因此曲面 S 的 Gauss 曲率为

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = 0.$$

3. 已知旋转曲面 $S : \boldsymbol{r}(t, \theta) = (g(t)\cos\theta, g(t)\sin\theta, f(t))$,

(1) 求 S 的 Gauss 曲率.

(2) 若 S 的 Gauss 曲率处处为零, 试判断曲面 S 的形状?

(3) 证明: 若 S 的经线有垂直于旋转轴的切线, 则切点是曲面 S 上的抛物点.

【解】 首先求得曲面 S 的第一和第二基本形式如下

$$I = ({g'}^2 + {f'}^2)dt^2 + g^2 d\theta^2,$$
$$II = \frac{g'f'' - g''f'}{\sqrt{{g'}^2 + {f'}^2}}\, dt^2 + \frac{gf'}{\sqrt{{g'}^2 + {f'}^2}}\, d\theta^2,$$

(1) S 的 Gauss 曲率

$$K = \frac{f'(g'f'' - g''f')}{g({g'}^2 + {f'}^2)^2}.$$

(2) 由 (1) 知, Gauss 曲率处处为零的充要条件是

$$f'(g'f'' - g''f') \equiv 0,$$

(i) 若 $f' \equiv 0$, 则 $f(t) = C$ (常数), 因而曲面是垂直于 z-轴的平面.

(ii) 若 $g'f'' - g''f' \equiv 0$, 即 $\frac{g''}{g'} \equiv \frac{f''}{f'}$, 那么

$$g' = Cf', \quad g = Cf + C_1,$$

当常数 $C \neq 0$ 时, 曲面为圆锥面; 当常数 $C = 0$ 时, 曲面为圆柱面.

(3) 若经线的切线垂直于旋转轴(即 z-轴), 则 $f' = 0$, 从而 $K = 0$, 所以切点为抛物点.

4. 证明: 在曲面上给定点处, 沿两个正交的方向的法曲率之和为常数.

【证明】 设曲面上给定点处的两个主曲率分别为 κ_1 和 κ_2, $d\boldsymbol{r}$ 和 $\delta\boldsymbol{r}$ 为给定点处任意两个相互成为直角的方向, 对应的法曲率分别为 κ_n 和 κ_n^*, 则由 Euler 公式有

$$\begin{aligned}\kappa_n &= \kappa_1 \cos^2\theta + \kappa_2 \sin^2\theta,\\ \kappa_n^* &= \kappa_1 \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \pm \theta\right) + \kappa_2 \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \pm \theta\right)\\ &= \kappa_1 \sin^2\theta + \kappa_2 \cos^2\theta.\end{aligned}$$

其中 θ 为方向 $d\boldsymbol{r}$ 和 u-曲线之间的夹角, 显然有

$$\kappa_n + \kappa_n^* = \kappa_1 + \kappa_2 = C\,(\text{给定点处为常数}).$$