2.3 曲面的第二基本形式

前面我们引进了曲面的第一基本形式 I, 研究了曲面的一些内蕴性质, 即只依赖于曲面本身, 而不依赖于曲面在空间中如何弯曲的几何性质. 在理论和实际应用中, 必须考虑曲面在空间中的弯曲程度, 为此, 我们将引进曲面的另一个二次微分式.

对正则 $C^k(k\geq 3)$ 曲面 $S:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$, 单位法向量 $\boldsymbol{n}=\frac{\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_v\times\boldsymbol{r}_v|}$ 作为参数 u,v 的函数, 其微分表示为 $d\boldsymbol{n}=\boldsymbol{n}_u du+\boldsymbol{n}_v dv$. 由于 $0=d(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n})=2\boldsymbol{n}\cdot d\boldsymbol{n}$, 所以 $d\boldsymbol{n}$ 是切平面中的向量. 令 $II=-d\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{n}$, 称 II 为曲面 S 的**第二基本形式**. 用参数表示便有

$$\begin{aligned} II &= -d\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{n}\\ &= -(\boldsymbol{r}_u du+\boldsymbol{r}_v dv)\cdot(\boldsymbol{n}_u du+\boldsymbol{n}_v dv)\\ &= Ldu^2+2M\,du\,dv+N\,dv^2\\ &= (du\ \ dv)\begin{pmatrix} L & M\\ M & N\end{pmatrix}\begin{pmatrix} du\\ dv\end{pmatrix}. \end{aligned}\tag{3.1}$$

其中 $L=-\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{n}_u,\quad M=-(\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{n}_v+\boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{n}_u)/2,\quad N=-\boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{n}_v$, 它们作为参数 u,v 的函数, 称为曲面 S 的**第二基本形式系数**.

由于 $\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{n}=0,\ \boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{n}=0$, 两式分别关于 u,v 求偏导数, 我们有

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{r}_{uu}\cdot\boldsymbol{n}+\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{n}_u=0,\quad \boldsymbol{r}_{uv}\cdot\boldsymbol{n}+\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{n}_v=0,\\ &\boldsymbol{r}_{vu}\cdot\boldsymbol{n}+\boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{n}_u=0,\quad \boldsymbol{r}_{vv}\cdot\boldsymbol{n}+\boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{n}_v=0, \end{aligned}$$

根据以上四式, 第二基本形式系数还有如下等价的表示:

$$\begin{aligned} L &= -\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{n}_u=\boldsymbol{r}_{uu}\cdot\boldsymbol{n}=\frac{(\boldsymbol{r}_{uu},\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v)}{\sqrt{EG-F^2}},\\ M &= -\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{n}_v=-\boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{n}_u=\boldsymbol{r}_{uv}\cdot\boldsymbol{n}=\frac{(\boldsymbol{r}_{uv},\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v)}{\sqrt{EG-F^2}},\\ N &= -\boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{n}_v=\boldsymbol{r}_{vv}\cdot\boldsymbol{n}=\frac{(\boldsymbol{r}_{vv},\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v)}{\sqrt{EG-F^2}}. \end{aligned}\tag{3.2}$$

另外, 因为 $\boldsymbol{n}\cdot d\boldsymbol{r}=0$, 微分便得 $d^2\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}=-d\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{n}$, 于是我们得到曲面的第

二基本形式的以下三种等价的表示

$$\begin{aligned} I\!I &= Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2 \\ &= \boldsymbol{n}\cdot d^2\boldsymbol{r} \\ &= -d\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{n}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

现在来说明第二基本形式的几何意义.

对曲面$S:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$上的给定点$P(u,v)$及其邻近点$Q(u+du,v+dv)$,并选定$P$点处的单位法向量$\boldsymbol{n}$. 令$d=\overrightarrow{PQ}\cdot\boldsymbol{n}$, 即位移向量$\overrightarrow{PQ}$在$\boldsymbol{n}$上的投影. $|d|$即从Q点到P点切平面的垂直距离, 而d的正负号依赖于Q点是位于P点切平面的正侧或负侧, 换句话说, d的正负号反映曲面S在P点处的弯曲方向. 利用向量形式的Tayloy展开式及事实$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_u=0,\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_v=0$, 有

$$\begin{aligned} d=\overrightarrow{PQ}\cdot\boldsymbol{n} &= (\boldsymbol{r}(u+du,v+dv)-\boldsymbol{r}(u,v))\cdot\boldsymbol{n} \\ &= \left[d\boldsymbol{r}+\frac{1}{2}d^2\boldsymbol{r}+o(du^2+dv^2)\right]\cdot\boldsymbol{n} \\ &= d\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}+\frac{1}{2}d^2\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}+o(du^2+dv^2) \\ &= \frac{1}{2}I\!I+o(du^2+dv^2). \end{aligned}$$

由此可见, $I\!I$代表起点在P的位移向量$\overrightarrow{PQ}$在法向量$\boldsymbol{n}$上投影的主要部分的二倍, 它描述了Q点在法方向上相对于P的改变, 即描述了曲面在P点附近弯曲的状况.

【例 1】 考察平面$\boldsymbol{r}(u,v)=(u,v,0)$与柱面$\boldsymbol{r}(u,v)=(\cos u,\sin u,v)$, 容易验证它们具有相同的第一基本形式$du^2+dv^2$, 但平面的第二基本形式$I\!I\equiv 0$, 而圆柱面的第二基本形式$I\!I=-du^2$, 这表明它们在空间中的形状完全不同(事实正是如此).

与第一基本形式I不同, 曲面的第二基本形式$I\!I$作为(du,dv)的二次型, 当$LN-M^2>0$时是正定或负定的; 当$LN-M^2<0$时是不定的; 而当$LN-M^2=0$时是退化的.

第二基本形式随参数而变化的规律叙述成如下定理.

定理 3.1 在容许相差一个正负号的意义下, 第二基本形式 $I\!I$ 与曲面 S 上正则参数 (u,v) 的选取无关.

证明 设 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$ 和 $\bar{\boldsymbol{r}}=\bar{\boldsymbol{r}}(\bar{u},\bar{v})$ 是曲面 S 的两个不同参数表示, 相应的单位法向量分别为 $\boldsymbol{n}$ 和 $\bar{\boldsymbol{n}}$. 利用一阶微分式的形式不变性有 $d\bar{\boldsymbol{r}}=d\boldsymbol{r}$. 另外, 根据 (1.8) 式又有, $d\bar{\boldsymbol{n}}=\pm d\boldsymbol{n}$ (正负号依赖于参数变换 $(u,v)\to(\bar{u},\bar{v})$ 是同向或反向参数变换). 因此

$$d\bar{\boldsymbol{r}}\cdot d\bar{\boldsymbol{n}}=\pm d\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{n},\quad \text{或}\quad \bar{I\!I}=\operatorname{sgn}(J)I\!I.$$

即在同向参数变换下, 第二基本形式不变, 而在反向参数变换下, 第二基本形式改变符号. □

性质 3.2 第二类基本量在参数变换下的关系为

$$\begin{pmatrix}\bar{L} & \bar{M}\\ \bar{M} & \bar{N}\end{pmatrix}=\operatorname{sgn}(J)\cdot J\cdot\begin{pmatrix}L & M\\ M & N\end{pmatrix}\cdot J^t. \tag{3.4}$$

由此可见, 第二类基本量在保持定向的容许参数变换下的变化规律与第一类基本量的变化规律是一样的(参见 (2.9) 式).

证明 根据定理3.1, 在参数变换 $u=u(\bar{u},\bar{v}),\ v=v(\bar{u},\bar{v})$ 下第二基本形式满足

$$\bar{I\!I}=\operatorname{sgn}(J)I\!I, \tag{3.5}$$

而且

$$(du\ \ dv)=(d\bar{u}\ \ d\bar{v})\cdot J.$$

由于

$$\begin{aligned}\operatorname{sgn}(J)I\!I&=\operatorname{sgn}(J)(du\ \ dv)\begin{pmatrix}L & M\\ M & N\end{pmatrix}\begin{pmatrix}du\\ dv\end{pmatrix}\\ &=\operatorname{sgn}(J)(d\bar{u}\ \ d\bar{v})J\begin{pmatrix}L & M\\ M & N\end{pmatrix}J^t\begin{pmatrix}d\bar{u}\\ d\bar{v}\end{pmatrix},\\ \bar{I\!I}&=(d\bar{u}\ \ d\bar{v})\begin{pmatrix}\bar{L} & \bar{M}\\ \bar{M} & \bar{N}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}d\bar{u}\\ d\bar{v}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

将以上两式代入 (3.5) 式并比较立即得到 (3.4) 式. □

定理 3.3 曲面的第二基本形式在$\mathbb{R}^3$的刚性运动下不变; 而在$\mathbb{R}^3$的反刚性运动下改变符号.

证明 设$f(P) = P \cdot \boldsymbol{T} + P_0$是$\mathbb{R}^3$的任一刚性或反刚性变换, 曲面$S: \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,v)$在$f$下的像为$S^*: \boldsymbol{r}^*(u,v) = f \circ \boldsymbol{r}(u,v)$. 则

$$\boldsymbol{r}_u^* \times \boldsymbol{r}_v^* = \begin{cases} (\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v) \cdot \boldsymbol{T}, & \text{当} \quad \det \boldsymbol{T} = 1, \\ -(\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v) \cdot \boldsymbol{T}, & \text{当} \quad \det \boldsymbol{T} = -1, \end{cases}$$

因此我们有$\boldsymbol{n}^* = \operatorname{sgn}(\det \boldsymbol{T})\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{T}$. 又因为$d\boldsymbol{r}^* = d\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{T}$, 所以

$$I\!I^* = -d\boldsymbol{r}^* \cdot d\boldsymbol{n}^* = -\operatorname{sgn}(\det \boldsymbol{T})\,(d\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{T}) \cdot (d\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{T}) = \operatorname{sgn}(\det \boldsymbol{T})I\!I.$$

注意到$\det \boldsymbol{T} = 1$或-1分别表示f是刚性运动或反刚性运动. □

下面定理表明, 第二基本形式在一点的值与这点邻近曲面形状的关系.

定理 3.4 曲面上, 使第二基本形式正定或负定的点邻近, 曲面的形状是凸的(或凹的, 由法向选取决定); 在第二基本形式不定的点邻近, 曲面是马鞍型的.

证明 设$P_0(u_0, v_0)$是曲面$S: \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,v)$上的任一取定点, 我们考察到$P_0$点切平面的高度函数

$$f(u,v) = (\boldsymbol{r}(u,v) - \boldsymbol{r}(u_0,v_0)) \cdot \boldsymbol{n}(u_0,v_0),$$

由于

$$f_u = \boldsymbol{r}_u \cdot \boldsymbol{n}(u_0,v_0), \quad f_v = \boldsymbol{r}_v \cdot \boldsymbol{n}(u_0,v_0),$$

所以$f_u(u_0,v_0) = f_v(u_0,v_0) = 0$, 即$(u_0,v_0)$是$f$的临界点. 在这一点, 高度函数$f$的二阶导数方阵(Hessian矩阵)为

$$\begin{bmatrix} f_{uu} & f_{uv} \\ f_{vu} & f_{vv} \end{bmatrix}(u_0,v_0) = \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix}(u_0,v_0).$$

因此, 当第二基本形式$I\!I$在点(u_0,v_0)正定或负定时, $f(u_0,v_0) = 0$是最大值或最小值, 这说明曲面S的形状是凸或凹的. 而当第二基本形式$I\!I$在点

(u_0,v_0)既非正定也非负定时, $f(u_0,v_0)=0$既不是最大值也不是最小值, 因而曲面S在这点附近是马鞍型. □

根据上述定理, 我们对曲面上的点进行如下分类:

(1) **椭圆点**—使$LN-M^2>0$的点. 在椭圆点处, 第二基本形式沿任何方向都不变号, 而且曲面在椭圆点邻近总位于切平面的一侧.

(2) **双曲点**—使$LN-M^2<0$的点. 在双曲点的切平面上, 有通过该点的两条直线将切平面分成四部分, 第二基本形式在这四部分或为正, 或为负, 而沿这两条直线, 第二基本形式为零. 曲面在双曲点邻近位于切平面的两侧.

(3) **抛物点**—使$LN-M^2=0$, 且$L^2+M^2+N^2\neq 0$的点. 在抛物点的切平面上, 有通过该点的惟一一条直线, 沿这条直线, 第二基本形式为零; 而沿其它任何方向第二基本形式都不变号.

(4) **平点**—使$L=M=N=0$的点.

习题2–3

1. 求平面和球面的第二基本形式.

【解】 对平面, 因法向量$\boldsymbol{n}$为常向量, 所以$I\!I=-d\boldsymbol{n}\cdot d\boldsymbol{r}\equiv 0$.

对中心径矢为$\boldsymbol{r}_0$, 半径为a的球面, 因其单位法矢量$\boldsymbol{n}=\frac{1}{a}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)$或$\boldsymbol{n}=\frac{1}{a}(\boldsymbol{r}_0-\boldsymbol{r})$, 于是$I\!I=-d\boldsymbol{n}\cdot d\boldsymbol{r}=\pm\frac{1}{a}I$.

2. 求旋转曲面$\boldsymbol{r}(u,v)=(f(v)\cos u, f(v)\sin u, g(v))$的第二基本形式.

【解】 直接计算得到以下各量

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r}_{uu}&=(-f\cos u,-f\sin u,0),\\
\boldsymbol{r}_{uv}&=(-f'\sin u,-f'\cos u,0),\\
\boldsymbol{r}_{vv}&=(f''\cos u,f''\sin u,g''),\\
\boldsymbol{n}&=\frac{1}{\sqrt{f'^2+g'^2}}(g'\cos u,g'\sin u,-f'),
\end{aligned}$$

因此

$$L=\boldsymbol{r}_{uu}\cdot\boldsymbol{n}=\frac{-fg'}{\sqrt{f'^2+g'^2}},\quad M=\boldsymbol{r}_{uv}\cdot\boldsymbol{n}=0,\quad N=\boldsymbol{r}_{vv}\cdot\boldsymbol{n}=\frac{f''g'-f'g''}{\sqrt{f'^2+g'^2}}.$$

3. 求曲面$z=f(x,y)$的第二基本形式.

【解】 令 $\boldsymbol{r}(x,y)=(x,y,f(x,y))$ 并直接计算得到以下各量

$$\boldsymbol{r}_x=(1,0,f_x),\quad \boldsymbol{r}_y=(0,1,f_y),$$

$$\boldsymbol{n}=\frac{\boldsymbol{r}_x\times\boldsymbol{r}_y}{|\boldsymbol{r}_x\times\boldsymbol{r}_y|}=\frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}(-f_x,-f_y,1),$$

$$\boldsymbol{r}_{xx}=(0,0,f_{xx}),\ \boldsymbol{r}_{xy}=(0,0,f_{xy}),\ \boldsymbol{r}_{yy}=(0,0,f_{yy}).$$

因此

$$L=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_{xx}=\frac{f_{xx}}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},$$

$$M=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_{xy}=\frac{f_{xy}}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},$$

$$N=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_{yy}=\frac{f_{yy}}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}.$$

从而, 曲面 $z=f(x,y)$ 的第二基本形式是

$$I\!I=\frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}[f_{xx}dx^2+2f_{xy}dxdy+f_{yy}dy^2].$$

4. 求环面 $\boldsymbol{r}(\theta,\phi)=((b+a\sin\phi)\cos\theta,(b+a\sin\phi)\sin\theta,a\cos\phi)$ 上的椭圆点、双曲点和抛物点, 其中 $a<b$ 是正常数, 参数 $0\le\theta,\phi\le 2\pi$.

【解】 直接计算知

$$L=\boldsymbol{r}_{\theta\theta}\cdot\boldsymbol{n}=(b+a\sin\phi)\sin\phi,$$

$$M=\boldsymbol{r}_{\theta\phi}\cdot\boldsymbol{n}=0,$$

$$N=\boldsymbol{r}_{\phi\phi}\cdot\boldsymbol{n}=a,$$

而且

$$LN-M^2=a(b+a\sin\phi)\sin\phi,$$

注意到第二基本形式系数只依赖于参数 ϕ, 即沿参数曲线 $\phi=\phi_0$, 第二基本形式系数为常数. 又因为 $0<a<b$, $a(b+a\sin\phi)>0$, 所以 $LN-M^2$ 与 $\sin\phi$ 同号. 最后我们得到环面上点的如下分类:

(1) 参数 ϕ 满足 $0<\phi<\pi$ 的点是椭圆点(对应环面的外侧点);

(2) 参数 ϕ 满足 $\pi<\phi<2\pi$ 的点是双曲点(对应环面的内侧点);

(3) 参数 $\phi=0$ 及 $\phi=\pi$ 的点是抛物点(对应环面的内外侧交界点).