2.2 曲面的第一基本形式

本节将引进曲面的第一基本形式, 它是曲面参数的二次微分式, 又是与容许参数选择无关的几何量. 作为应用, 将描写由第一基本形式如何决定诸如曲面上曲线的弧长、夹角及曲面域的面积等几何量的问题. 最后还将讨论曲面上(局部)正交参数曲线网的存在性问题.

设有正则参数曲面 S : $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$, 上一节我们已经知道曲面 S 在每一点 P 的切平面 T_PS 可看成是由坐标曲线切向量 $\boldsymbol{r}_u(u,v)$, $\boldsymbol{r}_v(u,v)$ 张成的二维向量空间, 它是 $\mathbb{R}^3$ 的子空间. 因此, 当曲面上的切向量作为 $\mathbb{R}^3$ 中的向量时可以求它们的长度和夹角. 换言之, 曲面 S 在任意一点的任意两个向量的内积就是它们作为 $\mathbb{R}^3$ 中向量的内积. 例如, 由于 S 的任何一个切向量 $\boldsymbol{v}$ 都可以在自然基底 $\{\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v\}$ 下表示成如下形式

$$\boldsymbol{v}=\lambda\boldsymbol{r}_u+\mu\boldsymbol{r}_v.$$

因此 $\boldsymbol{v}$ 的长度的平方为

$$|\boldsymbol{v}|^2=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}=\lambda^2\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_u+2\lambda\mu\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_v+\mu^2\boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{r}_v. \tag{2.1}$$

特别地, 切向量 $\boldsymbol{r}_u$ 的长度为 $\sqrt{\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_u}$, 切向量 $\boldsymbol{r}_v$ 的长度为 $\sqrt{\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_v}$. 进而, $\boldsymbol{r}_u$ 与 $\boldsymbol{r}_v$ 的夹角余弦为 $\frac{\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_v}{\sqrt{\boldsymbol{r}_u^2\boldsymbol{r}_v^2}}$.

由于自然基底 $\{\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v\}$ 一般不是单位正交基底, 因此, 我们令

$$\begin{aligned}
E(u,v)&=\boldsymbol{r}_u(u,v)\cdot\boldsymbol{r}_u(u,v),\\
F(u,v)&=\boldsymbol{r}_u(u,v)\cdot\boldsymbol{r}_v(u,v)=\boldsymbol{r}_v(u,v)\cdot\boldsymbol{r}_u(u,v),\\
G(u,v)&=\boldsymbol{r}_v(u,v)\cdot\boldsymbol{r}_v(u,v),
\end{aligned} \tag{2.2}$$

它们是基底 $\{\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v\}$ 的度量系数, 称为曲面的**第一类基本量**. 于是, (2.1) 式意味着切向量的长度平方是以矩阵 $\begin{pmatrix}E & F\\ F & G\end{pmatrix}$ 为系数的二次型.

现在我们将曲面参数表示的向量函数 $\boldsymbol{r}(u,v)$ 的一阶微分

$$d\boldsymbol{r}(u,v)=\boldsymbol{r}_u(u,v)du+\boldsymbol{r}_v(u,v)dv \tag{2.3}$$

看成是曲面 S 上任意点 $\boldsymbol{r}(u,v)$ 处的切向量, 其中 (du,dv) 是切向量 $d\boldsymbol{r}(u,v)$ 在自然基底 $\{\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v\}$ 下的分量. 那么, 其长度平方为

$$d\boldsymbol{r}(u,v)\cdot d\boldsymbol{r}(u,v)=E(u,v)du^2+2F(u,v)dudv+G(u,v)dv^2,$$

它是分量 (du,dv) 的二次型, 也可以看成一个二次微分式. 重要的是, 这个二次微分式是刚性不变量, 同时, 根据一次微分的形式不变性, 微分式 (2.3) 与正则参数的选取无关, 因此, 这个二次微分式作为 (2.3) 式与其自身的内积, 当然与正则参数的选取无关. 可见, 它是曲面的几何量, 我们称之为曲面的**第一基本形式**, 记为 I, 即有

$$\begin{aligned} I&=Edu^2+2Fdudv+Gdv^2\\ &=(du\ \ dv)\begin{pmatrix}E&F\\F&G\end{pmatrix}\begin{pmatrix}du\\dv\end{pmatrix}. \end{aligned}\tag{2.4}$$

对正则曲面, 显见第一类基本量 $E>0,\ G>0$, 而且

$$EG-F^2=\boldsymbol{r}_u^2\boldsymbol{r}_v^2-(\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_v)^2=(\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v)^2>0,\tag{2.5}$$

所以第一基本形式 I 是 (du,dv) 的正定二次形式.

定理 2.1 曲面的第一基本形式是容许参数变换的不变量.

证明 事实上, 我们已经根据一次微分的形式不变性给出了证明. 不过, 下面通过直接计算给出的证明仍然有着自身方法上的意义, 更何况证明过程中还将得到一些对今后讨论有用的关系式.

设 $u=u(\tilde u,\tilde v),\ v=v(\tilde u,\tilde v)$ 是曲面 $S:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$ 的任一容许参数变换, 根据求导的链式法则, 我们有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_{\tilde u}(\tilde u,\tilde v)&=\boldsymbol{r}_u(u,v)\frac{\partial u}{\partial\tilde u}+\boldsymbol{r}_v(u,v)\frac{\partial v}{\partial\tilde u},\\ \boldsymbol{r}_{\tilde v}(\tilde u,\tilde v)&=\boldsymbol{r}_u(u,v)\frac{\partial u}{\partial\tilde v}+\boldsymbol{r}_v(u,v)\frac{\partial v}{\partial\tilde v}, \end{aligned}\tag{2.6}$$

并且

$$\begin{aligned} du&=\frac{\partial u}{\partial\tilde u}d\tilde u+\frac{\partial u}{\partial\tilde v}d\tilde v,\\ dv&=\frac{\partial v}{\partial\tilde u}d\tilde u+\frac{\partial v}{\partial\tilde v}d\tilde v. \end{aligned}\tag{2.7}$$

我们用 $J=\frac{\partial(u,v)}{\partial(\tilde u,\tilde v)}=\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial \tilde u} & \frac{\partial v}{\partial \tilde u}\\ \frac{\partial u}{\partial \tilde v} & \frac{\partial v}{\partial \tilde v}\end{pmatrix}$ 表示参数变换的Jacobi矩阵, 则(2.6)和(2.7)式可以写成如下矩阵的形式

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{r}_{\tilde u}\\ \boldsymbol{r}_{\tilde v}\end{pmatrix}=J\cdot\begin{pmatrix}\boldsymbol{r}_u\\ \boldsymbol{r}_v\end{pmatrix},\qquad (du\ \ dv)=(d\tilde u\ \ d\tilde v)\cdot J. \tag{2.8}$$

根据第一类基本量的定义式(2.2)可得

$$\begin{pmatrix}\tilde E & \tilde F\\ \tilde F & \tilde G\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{r}_{\tilde u}\\ \boldsymbol{r}_{\tilde v}\end{pmatrix}\cdot(\boldsymbol{r}_{\tilde u}\ \ \boldsymbol{r}_{\tilde v})=J\cdot\begin{pmatrix}E & F\\ F & G\end{pmatrix}\cdot J^t. \tag{2.9}$$

于是我们有

$$\begin{aligned}\tilde I&=(d\tilde u\ \ d\tilde v)\cdot\begin{pmatrix}\tilde E & \tilde F\\ \tilde F & \tilde G\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}d\tilde u\\ d\tilde v\end{pmatrix}\\ &=(d\tilde u\ \ d\tilde v)\cdot J\begin{pmatrix}E & F\\ F & G\end{pmatrix}\cdot J^t\cdot\begin{pmatrix}d\tilde u\\ d\tilde v\end{pmatrix}\\ &=(du\ \ dv)\cdot\begin{pmatrix}E & F\\ F & G\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}du\\ dv\end{pmatrix}=I.\end{aligned}$$

□

注 1 由(2.9)式可见, 当曲面选取容许参数 $(\tilde u,\tilde v)$ 时, 所得到的第一基本形式系数 $\tilde E,\tilde F,\tilde G$ 一般将与参数 (u,v) 下的第一基本形式系数 E,F,G 不同, 显见系数矩阵差一个合同变换, 且

$$\tilde E\tilde G-\tilde F^2=\big(\det(J)\big)^2(EG-F^2). \tag{2.10}$$

定理 2.2 曲面的第一基本形式是 $\mathbb{R}^3$ 的合同变换下的不变量.

证明 设 $f: f(P)=P\cdot\boldsymbol{T}+P_0$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的任一合同变换, 曲面 $S:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$ 在 f 下的像为 $S^*:\boldsymbol{r}^*(u,v)=f\circ\boldsymbol{r}(u,v)$. 则

$$\boldsymbol{r}^*_u=\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{T},\quad \boldsymbol{r}^*_v=\boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{T},$$

设 E^*,F^*,G^* 是曲面 S^* 的第一基本形式系数, 由于 $\boldsymbol{T}$ 是正交矩阵, 所以

$$E^*=\boldsymbol{r}^*_u\cdot\boldsymbol{r}^*_u=(\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{T})\cdot(\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{T})=\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_u=E,$$

同理 $F^* = F$, $G^* = G$, 这时 S 与 S^* 的第一基本形式相同. $\square$

下面讨论第一基本形式的三个初步应用.

1. 求曲面上曲线的弧长　设 $C: \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}(u(t), v(t))$, $t \in [a, b]$ 是曲面上一条曲线, 由于 $\boldsymbol{r}'(t) = \boldsymbol{r}_u \frac{du}{dt} + \boldsymbol{r}_v \frac{dv}{dt}$, 按照曲线论中弧长的计算公式, 则有

$$s = \int_a^b \sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\left(\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt}\right) + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\, dt. \tag{2.11}$$

特别地, 由于 xy 平面具有第一基本形式 $I = dx^2 + dy^2$, 其上曲线 $x = x(t)$, $y = y(t)$ 的弧长

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt.$$

这与微积分中平面曲线的弧长公式一致.

2. 求曲面上两条曲线之间的夹角　曲面上两条曲线之间的夹角即两曲线在交点处切向量之间的夹角. 设 C 与 C^* 是曲面 $S: \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ 上两条交于 $P_0(u_0, v_0)$ 点的曲线, 并设其参数方程分别为

$$C:\ u = u(t),\ v = v(t) \quad 和 \quad C^*:\ u = u^*(t^*),\ v = v^*(t^*),$$

它们在 $P_0(u_0, v_0)$ 点处的切向量分别为

$$\left(\boldsymbol{r}_u \frac{du}{dt} + \boldsymbol{r}_v \frac{dv}{dt}\right)\bigg|_{P_0} \quad 及 \quad \left(\boldsymbol{r}_u \frac{du^*}{dt^*} + \boldsymbol{r}_v \frac{dv^*}{dt^*}\right)\bigg|_{P_0},$$

因此, C 与 C^* 在其交点 $P_0(u_0, v_0)$ 处夹角 θ 的余弦为

$$\cos\theta = \frac{\left(\boldsymbol{r}_u \frac{du}{dt} + \boldsymbol{r}_v \frac{dv}{dt}\right) \cdot \left(\boldsymbol{r}_u \frac{du^*}{dt^*} + \boldsymbol{r}_v \frac{dv^*}{dt^*}\right)}{\left|\boldsymbol{r}_u \frac{du}{dt} + \boldsymbol{r}_v \frac{dv}{dt}\right| \left|\boldsymbol{r}_u \frac{du^*}{dt^*} + \boldsymbol{r}_v \frac{dv^*}{dt^*}\right|}\Bigg|_{P_0},$$

分子、分母同乘以 $dtdt^*$ 得

$$\cos\theta = \frac{Edudu^* + F(dudv^* + dvdu^*) + Gdvdv^*}{\sqrt{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}\ \sqrt{E(du^*)^2 + 2Fdu^*dv^* + G(dv^*)^2}}\Bigg|_{P_0}. \tag{2.12}$$

因此, 如果我们知道曲面的第一类基本量(而无需知道曲面的方程和形状), 便能按上式求出两个切方向 $du:dv$ 及 $du^*:dv^*$ 之间的夹角.

推论 2.3 切平面上两个方向 $d\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_u du+\boldsymbol{r}_v dv$ 及 $\delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_u\delta u+\boldsymbol{r}_v\delta v$ 垂直的必要充分条件是 $Edu\delta u+F(du\delta v+dv\delta u)+Gdv\delta v=0$.

推论 2.4 曲面 $S:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$ 上 u-曲线和 v-曲线的夹角 θ 的余弦为

$$\cos\theta=\frac{F}{\sqrt{EG}}, \tag{2.13}$$

进而参数曲线(网)正交的必要充分条件是 $F\equiv 0$.

3. 求曲面(域)的面积 现在我们来推导曲面 $S:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v),(u,v)\in D$(平面区域)上给定区域 $\mathscr{D}$ 的面积(以下只是给出推导的直观思想, 详细的证明参见 C. Goffman 著《多元微积分》).

① 用 u-线和 v-线划分曲面域 $\mathscr{D}$ 成 $\begin{cases}\text{完整}\\ \text{不完整}\end{cases}$ 曲边四边形.

② 划分加细, $\begin{cases}\text{完整四边形的面积越接近于直边平行四边形的面积}\\ \text{不完整四边形面积越来越小, 在}\mathscr{D}\text{中所占比重愈小}\end{cases}$

③ 任取一个完整的曲边四边形 $PP_1P_2P_3$, 设四个顶点 P,P_1,P_2,P_3 对应的径矢分别为

$$\boldsymbol{r}(u,v),\quad \boldsymbol{r}(u+\Delta u,v),\quad \boldsymbol{r}(u,v+\Delta v),\quad \boldsymbol{r}(u+\Delta u,v+\Delta v),$$

由 Taylor 公式, 得

$$\overrightarrow{PP_1}=\boldsymbol{r}(u+\Delta u,v)-\boldsymbol{r}(u,v)=[\boldsymbol{r}_u(u,v)+\epsilon_1]\Delta u,$$

$$\overrightarrow{PP_2}=\boldsymbol{r}(u,v+\Delta v)-\boldsymbol{r}(u,v)=[\boldsymbol{r}_v(u,v)+\epsilon_2]\Delta v,$$

其中 $\lim\limits_{\Delta u\to 0}\epsilon_1=\lim\limits_{\Delta v\to 0}\epsilon_2=0$. 取其主要部分, 略去 $\Delta u,\Delta v$ 的高阶项便得

$$\overrightarrow{PP_1}\approx\boldsymbol{r}_u(u,v)\Delta u,\quad \overrightarrow{PP_2}\approx\boldsymbol{r}_v(u,v)\Delta v,$$

这时我们有

$$
\begin{aligned}
S_{\text{曲边四边形 } PP_1P_2P_3} &\approx S_{\text{平行四边形 } PP_1P_2P_3} \\
&= |\overrightarrow{PP_1} \times \overrightarrow{PP_2}| \\
&= |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|\Delta u \Delta v \\
&= \sqrt{EG-F^2}\Delta u \Delta v.
\end{aligned}
$$

进而我们可以把 $\Delta\sigma = \sqrt{EG-F^2}\Delta u\Delta v$ 或 $d\sigma = \sqrt{EG-F^2}dudv$ 作为曲面 S 上的**面积元素**.

④ 求和、取极限作为曲面域面积的公式

$$
\sigma = \lim_{\substack{\Delta u\to 0\\ \Delta v\to 0}} \sum \sqrt{EG-F^2}\Delta u\Delta v = \iint\limits_D \sqrt{EG-F^2}dudv. \tag{2.14}
$$

注 2 由于 E, F, G 是刚性不变量, 所以 σ 是刚性不变量. 而且, 由 (2.10) 式及二重积分的参数变换公式知 σ 是参数变换的不变量.

注 3 对于一个平面区域 $\mathscr{R}$, 由于 σ 不受坐标系选择的影响, 我们可以选择直角坐标系, 使那个平面区域在 xy 平面上; 由于 σ 不受参数选择的影响, 可选择 $u = x, v = y$, 这样, 平面的第一基本形式为 $I = dx^2 + dy^2$, 于是面积公式化为

$$
\sigma = \iint\limits_{\mathscr{R}} dxdy. \tag{2.15}
$$

这和惯用的平面区域的面积公式一致.

由于曲面的几何性质是与曲面的参数表示无关的, 因此如果可能的话总希望选取一些特殊的参数以简化计算过程. 下面定理将阐明曲面上总存在(局部)正交参数曲线网.

定理 2.5 设在曲面 $S: \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ 上给出两个线性独立的连续可微切向量场 $\boldsymbol{a}(u, v)$ 和 $\boldsymbol{b}(u, v)$, 则可选到一族新的参数 $(\tilde{u}, \tilde{v})$, 使在新的参数下, 坐标曲线的切向量 $\boldsymbol{r}_{\tilde{u}}$ 与 $\boldsymbol{r}_{\tilde{v}}$ 分别平行于 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$.

证明 考察$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$的表示式

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} &= a_1\boldsymbol{r}_u + a_2\boldsymbol{r}_v, \\ \boldsymbol{b} &= b_1\boldsymbol{r}_u + b_2\boldsymbol{r}_v, \end{aligned} \tag{2.16}$$

和两个一次微分式

$$b_2du - b_1dv, \quad -a_2du + a_1dv,$$

那么, 从常微分方程组理论得知, 分别存在非零积分因子λ和μ, 使这两个一次微分式变成全微分, 即有

$$\begin{aligned} \lambda(\ \ b_2du - b_1dv) &= d\tilde{u}, \\ \mu(-a_2du + a_1dv) &= d\tilde{v}, \end{aligned} \tag{2.17}$$

其中$\tilde{u} = \tilde{u}(u,v), \tilde{v} = \tilde{v}(u,v)$是两个连续可微函数.

由于$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$是线性独立的, 那么从(2.17)式得到

$$\left|\frac{\partial(\tilde{u},\tilde{v})}{\partial(u,v)}\right| = \lambda\mu\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

所以$\tilde{u}, \tilde{v}$可以作为曲面S的新参数. 其次, 从(2.17)式反解出du, dv得

$$du = \frac{\mu a_1 d\tilde{u} + \lambda b_1 d\tilde{v}}{\lambda\mu\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}, \qquad dv = \frac{\lambda b_2 d\tilde{v} + \mu a_2 d\tilde{u}}{\lambda\mu\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}},$$

即有

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(\tilde{u},\tilde{v})} = \frac{1}{\lambda\mu\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}\begin{pmatrix} \mu a_1 & \mu a_2 \\ \lambda b_1 & \lambda b_2 \end{pmatrix}.$$

所以

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_{\tilde{u}} &= \boldsymbol{r}_u\frac{\partial u}{\partial\tilde{u}} + \boldsymbol{r}_v\frac{\partial v}{\partial\tilde{u}} = \frac{1}{\lambda\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}(a_1\boldsymbol{r}_u + a_2\boldsymbol{r}_v) \parallel \boldsymbol{a}, \\ \boldsymbol{r}_{\tilde{v}} &= \boldsymbol{r}_u\frac{\partial u}{\partial\tilde{v}} + \boldsymbol{r}_v\frac{\partial v}{\partial\tilde{v}} = \frac{1}{\mu\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}(b_1\boldsymbol{r}_u + b_2\boldsymbol{r}_v) \parallel \boldsymbol{b}. \end{aligned}$$

□

推论 2.6 曲面上总存在正交参数曲线网.

证明 实际上, 对任何参数 (u,v), 取定

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{r}_u,\quad \boldsymbol{b}=-\frac{F}{E}\boldsymbol{r}_u+\boldsymbol{r}_v,$$

便立即得出, $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 构成 S 上的正交向量场. 根据上述结果, 在曲面 S 上存在参数 $(\tilde{u},\tilde{v})$, 使 $\boldsymbol{r}_{\tilde{u}}\parallel\boldsymbol{a},\quad \boldsymbol{r}_{\tilde{v}}\parallel\boldsymbol{b}$, 所以 $(\tilde{u},\tilde{v})$ 构成曲面的正交参数曲线网. □

习题 2–2

1. 求下列曲面的第一基本形式:

(1) 柱面 $\boldsymbol{r}(u,v)=\boldsymbol{\rho}(u)+v\boldsymbol{b}$;

(2) 椭圆面 $\boldsymbol{r}(u,v)=(a\cos u\cos v, b\cos u\sin v, c\sin u)$;

(3) 单叶双曲面 $\boldsymbol{r}(u,v)=(a\cosh u\cos v, b\cosh u\sin v, c\sinh u)$;

(4) 双叶双曲面 $\boldsymbol{r}(u,v)=(a\cosh u, b\sinh u\cos v, c\sinh u\sin v)$;

(5) 椭圆抛物面 $\boldsymbol{r}(u,v)=\left(u,v,\frac{1}{2}\left(\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}\right)\right)$;

(6) 双曲抛物面 $\boldsymbol{r}(u,v)=(a(u+v), b(u-v), 2uv)$.

2. 设一个曲面的第一基本形式为 $I=du^2+(u^2+a^2)dv^2$.

(1) 求它上面两条曲线 $u+v=0,\ u-v=0$ 的交角;

(2) 求它上面由三条曲线 $u=\pm av,\ v=1$ 所围成的三角形区域的面积.

【解】 (1) 关于曲线 $u+v=0$, 令 $u=u_1,\ v=v_1$, 则 $du_1=-dv_1$; 关于曲线 $u-v=0$, 令 $u=u_2,\ v=v_2$, 则 $du_2=dv_2$. 设此二曲线交角为 θ, 则

$$\cos\theta=\frac{Edu_1du_2+F(du_1dv_2+du_2dv_1)+Gdv_1dv_2}{\sqrt{Edu_1^2+Fdu_1dv_1+Gdv_1^2}\sqrt{Edu_2^2+Fdu_2dv_2+Gdv_2^2}}.$$

将第一类基本量 $E=1,\ F=0,\ G=u^2+a^2$ 代入上式并在交点 $(u,v)=(0,0)$ 处取值得

$$\cos\theta=\left.\frac{u^2+a^2-1}{u^2+a^2+1}\right|_{\substack{u=0\\v=0}}=\frac{a^2-1}{a^2+1}.$$

(2) 容易知道三条曲线 $u=\pm av,\ v=1$ 相交于下列三点: $A(u=0,v=$

$0), B(u=a, v=1), C(u=-a, v=1)$. 则曲边三角形 ABC 的面积是

$$\begin{aligned} S &= \iint_D \sqrt{EG-F^2}\,dudv \\ &= \iint_D \sqrt{u^2+a^2}\,dudv \\ &= \left[\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{2}}{3}+\ln(\sqrt{2}-1)\right]a^2. \end{aligned}$$

3. 求环面 $\boldsymbol{r}(\theta,\phi)=((b+a\sin\phi)\cos\theta,(b+a\sin\phi)\sin\theta,a\cos\phi)$ 的面积, 其中 $a,b\ (b>a)$ 是正常数, 参数 $0<\theta<2\pi, 0<\phi<2\pi$.

【解】 首先求得环面的第一基本形式为 $I=(b+a\sin\phi)^2d\theta^2+a^2d\phi^2$. 于是环面的面积为

$$\begin{aligned} S &= \iint\limits_{\substack{0\leq\theta\leq2\pi\\0\leq\phi\leq2\pi}} \sqrt{EG-F^2}\,d\theta d\phi \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} a(b+a\sin\phi)d\phi d\theta \\ &= 4\pi^2ab. \end{aligned}$$

4. 求抛物面 $z=axy$ 的直母线的正交轨线.

【解】 取抛物面 $z=axy$ 的正则参数表示 $\boldsymbol{r}(u,v)=(u,v,auv)$, 其 u-线的方程为 $\boldsymbol{r}(u)=(u,v_0,auv_0)$. 显然, $\boldsymbol{r}_u=(1,0,av_0)$ 是常向量, 即 u-线是直线. 同样可以证明 u-线也是直线.

由解析几何的理论知, 抛物面 $z=axy$ 只有两族直母线, 那么直母线即它的坐标曲线. 从而求直母线的正交轨线即求坐标曲线的正交轨线.

由于 u-线的方向为 $\delta u:\delta v=1:0$, 根据正交的条件, u-线的正交轨线的微分方程为 $Edu+Fdv=0$. 将抛物面 $z=axy$ 的第一基本形式系数 $E=1+a^2v^2, F=a^2uv, G=1+a^2u^2$ 代入上述微分方程, 得

$$-\frac{2}{u}du=\frac{2a^2v}{1+a^2v^2}dv,$$

两边积分得

$$-\ln u^2=\ln(1+a^2v^2)+\ln C_1 \quad 或 \quad u^2(1+a^2v^2)=C_1,$$

这就是 u-线的正交轨线的方程. 同样可求得 v-线的正交轨线的方程为

$$v^2(1+a^2u^2)=C_2,$$

其中 C_1, C_2 都是正积分常数.