第 2 章

曲面的局部几何性质

从本章开始我们研究$\mathbb{R}^3$中的正则曲面的局部几何性质. 类似于曲线论, 对曲面的研究仍将从参数表示开始.

凭几何直观有两个问题需要首先进行讨论: 其一是曲面上与度量有关的一些几何量的计算问题, 如长度、夹角及面积等; 其二是曲面在$\mathbb{R}^3$中如何放置的问题, 换言之, 即曲面在$\mathbb{R}^3$中的弯曲问题. 由于我们讨论的曲面是放置在$\mathbb{R}^3$中, 我们可以通过外围空间$\mathbb{R}^3$的欧氏内积在正则曲面上引进诱导度量形式, 即曲面的第一基本形式, 它是曲面参数的二次微分式, 而且与容许参数选择无关. 利用它可以完全决定曲面上与度量性质有关的几何量的计算.

曲面的弯曲问题要比曲线的情形复杂的多, 以圆柱面为例通过简单观察实验不难发现, 曲面在一点处的弯曲与该点处的方向有关. 我们从研究曲面的切平面到邻近点的距离入手, 引进曲面的另一个二次微分式—第二基本形式, 并结合第一基本形式引进法曲率的概念, 它是衡量曲面在一点处沿给定切方向的弯曲程度和弯曲方向的几何量, 由此展开对曲面弯曲问题的全面讨论. 主要包括两方面的问题: 一是弯曲随方向的变化规律, 结论将表现在Euler公式; 二是在曲面上给定点处沿一切切方向的弯曲中是否有最大或最小弯曲? 答案是肯定的, 这样的弯曲我们将称之为主曲率, 相应的方向称之为主方向. 进一步, 利用主曲率我们还将介绍曲面的Gauss曲率和平均曲率的概念.

关于主曲率的讨论大致有三种成熟的做法: 一是利用解析几何中共扼与正交的概念来定义主方向, 相应于这个方向的法曲率称为主曲率; 二是将法曲率看成切方向的函数, 利用微积分考察这个函数的临界方向, 将其定义为主方向, 相应的临界值称为主曲率. 第三种是现代教材中流行的做法, 引进Weingarten变换, 利用线性代数的知识, 将该变换的特征值定义为主曲率, 特征向量定义为主方向. 前两种是在引进法曲率的基础上进行的, 而第三种做

法可以事先没有法曲率的概念, 这样做尽管以隐藏主曲率的几何意义为代价, 但易于推广到高维的情形. 因此, 本章我们将采用第三种做法.

如同曲线的情形, 我们当然想知道决定曲面的完全不变量系统, 根据上述描写可以猜测, 这个不变量系统应该是曲面的第一基本形式和第二基本形式. 对这一问题的完整讨论将在下一章单独进行.

2.1 正则曲面 切平面

设 $D \subset \mathbb{R}^2$ 是一开区域, $\boldsymbol{r}: D \to \mathbb{R}^3$ 是一个 1-1 映射. 如果在 $\mathbb{R}^2$ 和 $\mathbb{R}^3$ 中分别建立了笛卡尔直角坐标系, 并用 (u,v) 表示 $\mathbb{R}^2$ 内点的坐标, (x,y,z) 表示 $\mathbb{R}^3$ 中点的坐标, 则映射 $\boldsymbol{r}$ 的表达式为

$$\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \\ z = z(u,v), \end{cases} \qquad (u,v) \in D, \tag{1.1}$$

在这个映射下, D 的像集构成空间 $\mathbb{R}^3$ 中的一张曲面 S, 其中 (u,v) 称为曲面 S 的参数, (1.1) 式称为 S 的(**坐标式**)**参数方程**. 以后经常把坐标式参数方程写成(**向量式**)**参数方程**, 即

$$\boldsymbol{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)),$$

而且总假定函数 $x(u,v), y(u,v), z(u,v) \in C^k,\ k \geq 3$.

给定 $(u,v) \in D$ 便确定三元组 $(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$, 从而得到曲面上一点 P, 而 $\boldsymbol{r}(u,v)$ 正是 P 点对应的径矢, 因此 (u,v) 也称曲面的**曲纹坐标**或**局部坐标**, (x,y,z) 为曲面上点的空间坐标. 在用参数表示的曲面中, 用曲纹坐标比空间坐标更为方便.

给出曲面 S 上任一点 P_0, 设其曲纹坐标 (u_0,v_0), P_0 点的径矢 $\boldsymbol{r}(u_0,v_0)$. 现在固定其中一个参数, 而让另一参数变. 如令 $u = u_0$ (即固定参数 u), 而让 v 在其定义域内变动, 得到曲面 S 上过 P_0 点的一条曲线 $\boldsymbol{r}(u_0,v)$, 称为 $\boldsymbol{v}$**-曲线**. 对不同的 u_0, v-曲线组成曲面上一曲线族, 称为 $\boldsymbol{v}$**-曲线族**. 类似地, 令 $v = v_0$ (即固定参数 v), 而让 u 在其定义域内变动, 得到曲面 S 上过 P_0 点的另一条曲

线 $\boldsymbol{r}(u, v_0)$, 称为 **$\boldsymbol{u}$-曲线**. 对不同的 v_0, u-曲线组成曲面上另一曲线族, 称为 **$\boldsymbol{u}$-曲线族**. u-曲线和 v-曲线合称曲面的**参数曲线**或**坐标曲线**. 这两族参数曲线构成一个曲线网, 称为曲面的**参数曲线网**或**坐标曲线网**.

对于曲面 S 上的坐标曲线: u-曲线和 v-曲线, 其切向量分别为

$$\boldsymbol{r}_u := \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right), \quad \boldsymbol{r}_v := \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right). \tag{1.2}$$

在 u-曲线和 v-曲线的交点 $P_0(u_0, v_0)$ 处, 若两条坐标曲线的切向量 $\boldsymbol{r}_u(u_0, v_0)$ 和 $\boldsymbol{r}_v(u_0, v_0)$ 线性无关, 即

$$\boldsymbol{r}_u(u_0, v_0) \times \boldsymbol{r}_v(u_0, v_0) \neq \boldsymbol{0},$$

则称 P_0 是曲面 S 上的**正则点**, 否则称为**奇点**. 全部由正则点组成的曲面称为**正则曲面**. 换言之, 在正则曲面上, 处处成立

$$\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v \neq \boldsymbol{0}, \tag{1.3}$$

今后限于讨论正则曲面而不另加声明.

如果 $P_0(u_0, v_0)$ 是曲面 $S : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ 上的正则点, 则 $\boldsymbol{r}_u(u_0, v_0)$ 与 $\boldsymbol{r}_v(u_0, v_0)$ 不共线, 因此 $\boldsymbol{r}_u(u_0, v_0)$ 和 $\boldsymbol{r}_v(u_0, v_0)$ 张成 P_0 点的一张平面, 称为曲面 S 在点 P_0 的**切平面**, 记为 $T_{P_0}S$. 过 P_0 点且与切平面 $T_{P_0}S$ 垂直的直线称之为曲面在该点的**法线**. 显然, $\boldsymbol{r}_u(u_0, v_0) \times \boldsymbol{r}_v(u_0, v_0)$ 是曲面 S 在点 P_0 的一个**法向量**, 相应的单位法向量为

$$\boldsymbol{n} = \left(\frac{\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|}\right)_{(u_0, v_0)}.$$

如果将切平面看成一个二维向量空间, 则 $\{\boldsymbol{r}_u(u_0, v_0), \boldsymbol{r}_v(u_0, v_0)\}$ 是 $T_{P_0}(S)$ 的一组基向量(未必正交基). 下面性质说明切平面的几何意义.

性质 1.1 $T_{P_0}S$ 等于曲面 S 上过 P_0 点的曲线在 P_0 点的切向量的全体.

证明 事实上, 我们需要证明两件事: (i) 过 P_0 点的任一曲线在 P_0 点的切向量位于 $T_{P_0}S$; (ii) $T_{P_0}S$ 中任一向量是 S 上某条过 P_0 点的曲线在 P_0 点的切向量. 以下分别完成证明.

为证明 (i), 注意曲面上曲线可以看成是 uv 平面域 D 内一条曲线在曲面的映射 $\boldsymbol{r}$ 下的像集. 按照这种理解, 曲面 $S:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$ 上曲线通常表示成

$$C:\ u=u(t),\quad v=v(t),\quad t\in(a,b)\quad \text{或}$$
$$\boldsymbol{\gamma}(t)=\boldsymbol{r}(u(t),v(t)),\quad t\in(a,b).$$

现设 $C:\boldsymbol{\gamma}(t)=\boldsymbol{r}(u(t),v(t))$ 是曲面 S 上过 P_0 点的任一条曲线, 且 $P_0(u_0,v_0)$ 点对应的参数 $t=t_0$, 即有 $u_0=u(t_0),v_0=v(t_0)$. 易见

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\gamma}'(t_0)&=\left(\boldsymbol{r}_u\frac{du}{dt}+\boldsymbol{r}_v\frac{dv}{dt}\right)_{t=t_0}\\&=\boldsymbol{r}_u(u_0,v_0)\left.\frac{du}{dt}\right|_{t=t_0}+\boldsymbol{r}_v(u_0,v_0)\left.\frac{dv}{dt}\right|_{t=t_0}.\end{aligned}$$

可见 $\boldsymbol{\gamma}(t)$ 在 P_0 点的切向量都能用该点两条坐标曲线的切向量线性表示. 这正是 (i) 的结论.

反过来, 对任一线性组合 $\lambda\boldsymbol{r}_u(u_0,v_0)+\mu\boldsymbol{r}_v(u_0,v_0)\in T_{P_0}S$ (这里 λ,μ 是实常数), 令 $\boldsymbol{\gamma}(t)=\boldsymbol{r}(u(t),v(t))$, 其中

$$\begin{cases}u(t)=u_0+\lambda(t-t_0),\\v(t)=v_0+\mu(t-t_0),\end{cases}$$

显然 $u(t_0)=u_0,\ v(t_0)=v_0$, 即曲线过 $P_0(u_0,v_0)$ 点, 且

$$\boldsymbol{\gamma}'(t_0)=\lambda\boldsymbol{r}_u(u_0,v_0)+\mu\boldsymbol{r}_v(u_0,v_0).$$

这正是 (ii) 的结论.

综上所述, 曲面 S 上所有过 P_0 点的曲线的切向量恰好组成一个二维向量空间, 它正是曲面 S 在 P_0 点的切平面. 切平面中任一方向称为曲面 S 在 P_0 点的一个切方向. 与曲线时相比较, 曲线在一点处只有一个切方向, 而曲面在一点处有无穷多个切方向, 这无穷多个切方向构成曲面的切平面. □

如同参数曲线的情形, 曲面的参数也允许作一定的参数变换. 设曲面 $S:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$ 的参数变换为

$$\begin{cases}u=u(\tilde{u},\tilde{v}),\\v=v(\tilde{u},\tilde{v}),\end{cases}\qquad(\tilde{u},\tilde{v})\in\tilde{D},\tag{1.4}$$

其中 $u(\tilde{u},\tilde{v})$, $v(\tilde{u},\tilde{v})$ 都是 $\tilde{u},\tilde{v}$ 的 3 次以上连续可微函数. 记 Jacobi 矩阵

$$J=\frac{\partial(u,v)}{\partial(\tilde{u},\tilde{v})}=\begin{pmatrix}\frac{\partial u(\tilde{u},\tilde{v})}{\partial\tilde{u}} & \frac{\partial v(\tilde{u},\tilde{v})}{\partial\tilde{v}}\\ \frac{\partial u(\tilde{u},\tilde{v})}{\partial\tilde{v}} & \frac{\partial v(\tilde{u},\tilde{v})}{\partial\tilde{v}}\end{pmatrix}, \tag{1.5}$$

如果 $\det J\neq 0$, 则称参数变换 (1.4) 为**容许参数变换**.

在新参数 $(\tilde{u},\tilde{v})$ 下, 曲面 S 的参数方程又可表示为

$$\boldsymbol{r}(u,v)=\boldsymbol{r}(u(\tilde{u},\tilde{v}),v(\tilde{u},\tilde{v})),$$

相应的坐标曲线的切向量为

$$\begin{cases}\boldsymbol{r}_{\tilde{u}}=\boldsymbol{r}_u\frac{\partial u}{\partial\tilde{u}}+\boldsymbol{r}_v\frac{\partial v}{\partial\tilde{u}},\\ \boldsymbol{r}_{\tilde{v}}=\boldsymbol{r}_u\frac{\partial u}{\partial\tilde{v}}+\boldsymbol{r}_v\frac{\partial v}{\partial\tilde{v}},\end{cases} \tag{1.6}$$

所以在容许参数变换 (1.4) 下,

$$\boldsymbol{r}_{\tilde{u}}\times\boldsymbol{r}_{\tilde{v}}=(\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v)\det J. \tag{1.7}$$

从而

$$\tilde{\boldsymbol{n}}=\operatorname{sgn}(J)\boldsymbol{n}, \tag{1.8}$$

其中

$$\operatorname{sgn}(J)=\begin{cases}1, & \det J>0\\ -1, & \det J<0\end{cases}.$$

从关系式 (1.7) 可以看出, 当 $\det J>0$ 时, $\boldsymbol{r}_{\tilde{u}}\times\boldsymbol{r}_{\tilde{v}}$ 与 $\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v$ 方向相同; 而当 $\det J<0$ 时, $\boldsymbol{r}_{\tilde{u}}\times\boldsymbol{r}_{\tilde{v}}$ 与 $\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v$ 方向相反. 因此, 当 $\det J>0$ 时相应的参数变换称为同向参数变换, 而当 $\det J<0$ 时相应的参数变换称为反向参数变换.

另外, 由 (1.6) 式还可以看出, 参数变换诱导出切平面的基变换, 基变换的矩阵就是参数变换的 Jacobi 矩阵 J, 即

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{r}_{\tilde{u}}\\ \boldsymbol{r}_{\tilde{v}}\end{pmatrix}=J\begin{pmatrix}\boldsymbol{r}_u\\ \boldsymbol{r}_v\end{pmatrix}. \tag{1.9}$$

性质 1.1 正则性、切平面与法线都与容许参数选择无关.

证明 这是 (1.7) 式的推论. □

习题 2–1

1. 证明曲面 $S : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ 上曲线 $C : \boldsymbol{\gamma}(t) = \boldsymbol{r}(u(t), v(t))$ 的切方向可由 S 的参数的微分(即 du, dv)的比值完全确定.

【证明】 容易写出

$$\frac{d\boldsymbol{\gamma}}{dt} = \frac{du}{dt}\left(\boldsymbol{r}_u + \boldsymbol{r}_v \frac{dv}{du}\right),$$

所以 $\frac{d\boldsymbol{\gamma}}{dt} \parallel (\boldsymbol{r}_u + \boldsymbol{r}_v \frac{dv}{du})$, 于是 $\frac{d\boldsymbol{\gamma}}{dt}$ 在 $P_0(u_0, v_0)$ 点的方向由

$$\boldsymbol{r}_u(u_0, v_0) + \boldsymbol{r}_v(u_0, v_0)\left(\frac{dv}{du}\right)_{\substack{u=u_0\\ v=v_0}}$$

确定, 但 $\boldsymbol{r}_u(u_0, v_0), \boldsymbol{r}_v(u_0, v_0)$ 在 P_0 点是已知向量, 所以 $\frac{d\boldsymbol{\gamma}}{dt}$ 在 P_0 点的方向完全由 P_0 点处的 $\frac{dv}{du}$ 所确定.

2. 参数方程

$$\boldsymbol{r}(\theta, v) = \left(\cos\theta + v\sin\frac{\theta}{2}\cos\theta, \sin\theta + v\sin\frac{\theta}{2}\sin\theta, v\cos\frac{\theta}{2}\right),$$

$-\pi < \theta < \pi, -\frac{1}{2} < v < \frac{1}{2}$, 所表示的曲面 S 称为麦比乌斯(Möbius)带. 求曲面 S 在 $v = 0$ 处的单位法向量 $\boldsymbol{n}(\theta, 0)$.

【解】 直接计算我们得到

$$\boldsymbol{n}(\theta, 0) = \left(\cos\theta\cos\frac{\theta}{2}, \sin\theta\cos\frac{\theta}{2}, -\sin\frac{\theta}{2}\right),$$

于是

$$\lim_{\theta\to-\pi} \boldsymbol{n}(\theta, 0) = (0, 0, 1),$$

$$\lim_{\theta\to\pi} \boldsymbol{n}(\theta, 0) = (0, 0, -1),$$

所以 $\lim\limits_{\theta\to\pi} \boldsymbol{n}(\theta, 0) = -\lim\limits_{\theta\to-\pi} \boldsymbol{n}(\theta, 0)$. 但是容易知道

$$\lim_{\theta\to\pi} \boldsymbol{r}(\theta, 0) = \lim_{\theta\to-\pi} \boldsymbol{r}(\theta, 0).$$

这表示单位法向量 $\boldsymbol{n}$ 沿着 $v = 0$ 的曲线移动一周后将改变方向, 因此麦比乌斯(Möbius)带是不可定向曲面.

3. 求正则曲面 $F(x, y, z) = 0$ 在其任意点的切平面和法线的方程.

【解】 设 $\boldsymbol{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$ 为 $F(x,y,z)=0$ 上任一正则曲线, 则

$$F(x(t),y(t),z(t))=0,$$

所以

$$F_x\frac{dx}{dt}+F_y\frac{dy}{dt}+F_z\frac{dz}{dt}=0,$$

而 $\boldsymbol{r}'(t)=(\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt},\frac{dz}{dt})$ 又为曲面的一个切方向, 由 $\boldsymbol{r}(t)$ 的任意性知 (F_x,F_y,F_z) 可作为曲面的法向量, 故切平面方程为

$$F_x(X-x)+F_y(Y-y)+F_z(Z-z)=0,$$

法线方程为

$$\frac{X-x}{F_x}=\frac{Y-y}{F_y}=\frac{Z-z}{F_z}.$$

4. 证明: 曲面为球面(或球面的一部分)的充分必要条件是曲面的所有法线过定点, 且定点为球心.

【证明】 $(\Rightarrow)$ 设球面为 $(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)^2=R^2$, 则 $(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)$ 可作为球面的法向量, 从而球面在其上任一点的法线方程为

$$\boldsymbol{\rho}(t)=\boldsymbol{r}+t(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0),\quad -\infty<t<\infty,$$

显然法线过 $\boldsymbol{r}_0$, 即球心.

$(\Leftarrow)$ 若曲面 $S:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$ 的所有法线 $\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{r}+\lambda\boldsymbol{n}$ 过定点 $\boldsymbol{r}_0$, 则其法向量 $\boldsymbol{n}\parallel(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)$, 从而

$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\cdot d\boldsymbol{r}=0,$$

积分上式即得

$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)^2=R^2,$$

这表明曲面是以 $\boldsymbol{r}_0$ 为球心, 半径为 R 的球面.