1.5 平面曲线的两个整体性定理

熟知平面曲线的特征是挠率$\tau \equiv 0$. 作为空间曲线的特殊情形, 只要在空间曲线的基本公式中, 取$\tau = 0$, 就得到平面曲线的基本公式

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{T}} = \kappa \boldsymbol{N}, \\ \dot{\boldsymbol{N}} = -\kappa \boldsymbol{T}. \end{cases}$$

同样在空间曲线的基本定理中, 取$\tau = 0$, 就得到平面曲线的基本定理. 从这种观点出发, 可以认为平面曲线的理论已基本完善.

另一种观点, 可以不作为空间曲线的特殊情形, 而类似于空间曲线(定义在$\mathbb{R}^3$中的曲线), 将目标限制在$\mathbb{R}^2$中(维数降低), 来考察平面曲线本身的特殊性. 考虑到在平面上可以引入有向角的概念, 以使平面曲线的理论得到更完善的表现.

1. 相对曲率的定义 回忆空间曲线的曲率定义为$k = \lim\limits_{\Delta s \to 0} \left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right|$, 这里$\Delta\varphi$为曲线上两邻近点切向量间的夹角. k的几何意义是刻画曲线在一点处的弯曲程度. 由于在平面上有有向角的概念, 即顺时针计算角度为负值, 反时针计算角度为正值. 因此, 对于平面曲线$C: \boldsymbol{r}(t) = \{x(t), y(t)\}, \quad t \in (a, b)$, 我们可以定义$C$的**相对曲率**为

$$k_r = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s}.$$

2. 相对曲率的几何意义

绝对值 $|k_r| = k$, 反映曲线的弯曲程度;

正负号 反映曲线沿弧长增加时的弯曲方向. 具体地说, 在$k_r > 0$的点处, $\Delta\varphi > 0$, 这意味着曲线向左转弯; 而在$k_r < 0$的点处, $\Delta\varphi < 0$, 这表明曲线向右转弯.

3. 相对曲率、绝对曲率的区别与联系

首先, 就绝对值而言, 二者是相同的, 即$|k_r| = k$. 其次

$$\begin{cases} \text{绝对曲率} & \text{非负, 只反映弯曲程度;} \\ \text{相对曲率} & \text{可正可负, 不但反映弯曲程度, 而且反映弯曲方向.} \end{cases}$$

5. 相对曲率的计算公式

(1) 一般参数表示时, 设 $C:\boldsymbol{r}(t)=\{x(t),y(t),\},t\in(a,b)$ 为一般参数

$$k_r=\frac{x'y''-x''y'}{(x'^2+y'^2)^{3/2}}.$$

(2) 弧长参数表示时, 设 $C:\boldsymbol{r}(s)=\{x(s),y(s),\},s\in(s_0,s_1)$ 为弧长参数

$$k_r=-\frac{\ddot{x}}{\dot{y}}=\frac{\ddot{y}}{\dot{x}},\quad \text{或}\quad k_r=\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}.$$

6. 平面曲线的自然方程 根据平面曲线的基本定理, 在有向平面上, 我们给出了相对曲率 $k_r(s)$ 就完全确定了曲线的形状. 因此我们把方程

$$k_r=k_r(s),$$

称为平面曲线的**自然方程**或**禀性方程**.

下面我们讨论在有向平面上给出了相对曲率 $k_r(s)$, 如何决定曲线的形状, 即如何找出它的参数方程. 设所求曲线的参数方程为 $\boldsymbol{r}(s)=\{x(s),y(s)\}$, 根据相对曲率的定义知道

$$k_r(s)=\frac{d\varphi}{ds},$$

并且 φ 是适合下述关系的 s 的函数

$$\cos\varphi=\dot{x},\quad \sin\varphi=\dot{y}$$

上式两端积分就得到

$$x(s)=\int\cos\varphi\,ds,\quad y(s)=\int\sin\varphi\,ds,$$

其中 $\varphi(s)=\int k_r(s)\,ds$. 这样就得到了所求曲线的参数方程.

【例5】 求抛物线 $y=-x^2$ 在原点的相对曲率.

【证明】 令 $x=t$, 则 $\boldsymbol{r}(t)=\{t,-t^2\}$, 所以

$$k_r(0)=\frac{x'y''-x''y'}{(x'^2+y'^2)^{3/2}}=-2,$$

由$k_r<0$知, 抛物线在原点处邻近是右转弯的. (可以通过描点法, 确定该抛物线的正方向, 进而决定转动方向, 并与由相对曲率得到的结果相比较)

【例6】 求自然方程为$k_r=\frac{1}{\sqrt{2as}}$ $(a>0)$的曲线的参数方程.

【证明】 设曲线的参数方程为$\boldsymbol{r}(s)=\{x(s),y(s)\}$. 因为$k_r=\frac{d\varphi}{ds}$, 所以$\varphi=\int k_r\,ds=\int\frac{ds}{\sqrt{2as}}=\sqrt{\frac{2s}{a}}$, 或

$$s=\frac{a\varphi^2}{2},\quad 即\quad k_r=\frac{1}{a\varphi}.$$

再由$\dot{x}=\cos\varphi,\dot{y}=\sin\varphi$得出

$$\begin{aligned}x&=\int\cos\varphi\,ds=\int\cos\varphi\frac{ds}{d\varphi}\cdot d\varphi=\int\frac{\cos\varphi}{k_r}\,d\varphi\\&=\int a\varphi\cos\varphi\,d\varphi=a(\cos\varphi+\varphi\sin\varphi).\end{aligned}$$

同理可得

$$y=\int\sin\varphi\,ds=\int a\varphi\sin\varphi\,d\varphi=a(\sin\varphi-\varphi\cos\varphi).$$

所以曲线的参数方程为

$$\boldsymbol{r}(s)=\{a(\cos\varphi+\varphi\sin\varphi),a(\sin\varphi-\varphi\cos\varphi)\}.$$

【例7】 求旋轮线$\boldsymbol{r}(\theta)=\{a(\theta-\sin\theta),a(1-\cos\theta)\}$的自然方程.

【证明】 经过简单计算得到

$$k_r=-\frac{1}{4a\sin\frac{\theta}{2}},\qquad s=-4a\cos\frac{\theta}{2},$$

所以旋轮线的自然方程为

$$k_r=-\frac{1}{\sqrt{16a^2-s^2}}.$$

6. 平面曲线的渐缩线和渐伸线

7. 平面曲线的整体性质 在应用Frenet公式研究曲线在一点邻近处的性质时, 我们把讨论的范围限制在一点的充分小邻域, 这样得到的性质是曲

线的局部性质. 如果以曲线的全部或一段作为研究对象时, 就得到曲线的整体性质. 这里我们列举曲线整体几何(即大范围几何)的几个例子, 从中可以初步看出局部和整体性质的区别和联系.

如果可微映照$\boldsymbol{r}(t):[a,b]\to\mathbb{R}^3$及其各阶导数在$a$、$b$两点相同, 即

$$\boldsymbol{r}(a)=\boldsymbol{r}(b),\quad \boldsymbol{r}'(a)=\boldsymbol{r}'(b),\quad \boldsymbol{r}''(a)=\boldsymbol{r}''(b),\quad \cdots$$

则称$r(t)$为**闭曲线**. 如果曲线自身不相交, 即从$t_1\neq t_2$就有$\boldsymbol{r}(t_1)\neq\boldsymbol{r}(t_2)$, 则称为**简单曲线**.

定理 7.3 (**等周不等式**)设C是周长为L的平面简单闭曲线, A是C所围成区域的面积. 则

$$L^2-4\pi A\geq 0,$$

等号当且仅当C是圆周时成立.

【注 2】 (**可微分的Jordan曲线定理**) 设$\boldsymbol{r}(t):[0,L]\to\mathbb{R}^2$是平面正则简单闭曲线. 则$\mathbb{R}^2-\boldsymbol{r}([0,L])$恰有两个连通分支, 且以$\boldsymbol{r}([0,L])$为它们的公共边界. 根据这一定理, 我们总假定平面上任意一条简单闭曲线C总围成平面上的一个称为的**内部**的区域. 无论我们什么时候谈到简单闭曲线C所围成的面积, 就意味着C的内部的面积. (Jordan 曲线定理对诸如环面上的简单闭曲线并不成立)

【注 3】 等周不等式是微分几何中最古老的整体性定理, 它的雏形是: **在平面上所有长度为L的简单闭曲线中, 哪一条所包围的面积最大**? 等周问题的这种形式, 希腊人早已所知, 他们也知道答案是圆. 然而关于圆是等周问题的答案的令人满意的证明, 却是很久以后才出现. 主要原因似乎是最早的一些证明都假设了解的存在性. 直到1870年才由K. Weierstrass指出, 许多类似的问题并没有解, 他给出了等周问题解的存在性的完全的证明. Weierstrass的证明有点难懂, 这是他本人发展的求某种积分的最大值(或最小值) 的理论的一个推论(这个理论称为变分学, 等周问题是利用这个外理论处理的问题中的一个典型例子). 以后人们找到了更直接的证明. 其中最容易理解的是E. Schmidt于1939年提出的证明方法.

对于平面闭曲线C, 设$\theta(s)$是从x轴正向到s处切向量$\boldsymbol{\alpha}$的交角. 取$\theta(s)$为s的连续可微函数, 如果L为C的周长, 因$\boldsymbol{\alpha}(0)=\boldsymbol{\alpha}(L)$故$\theta(L)-\theta(0)$

必为2π的整数倍, 即曲线C的切线像$\boldsymbol{\alpha}(s)$在单位圆周上环绕原点绕了若干圈(逆时针旋转时, 圈数为正; 顺时针旋转时, 圈数为负).

定义 7.2 平面曲线C的切线像$\boldsymbol{\alpha}(s)$在单位圆周上环绕原点O所绕的圈数i_r称为C的**旋转指标**. 显然由旋转指标的定义可以看出

$$i_r = \frac{\theta(L)-\theta(0)}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\int_0^L \theta'(s)\,ds = \frac{1}{2\pi}\int_C k_r\,ds.$$

定理 7.4 (**切线旋转指标定理**)平面简单光滑闭曲线的旋转指标等于± 1.

设正则平面曲线(不一定是闭曲线)$C:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t), t\in[a,b]$, 如果对所有$t\in[a,b]$, C的轨迹全部位于由t处切线所决定的闭半平面的一边, 则称C是**凸的**.

正则平面曲线的**顶点**, 是使$k_r'(t)=0$的点$t\in[a,b]$. 例如不等轴的椭圆恰有四各顶点, 即轴于椭圆相遇的点. 一个有趣的整体事实是: 这个数正是一切凸闭曲线所具有的最少的顶点数.

定理 7.5 (**四顶点定理**)简单凸闭曲线至少有四个顶点.

【注 3】 四顶点定理对简单闭曲线(不一定是凸的)也成立, 但证明更难. 有关这个课题参见: Chern, S. S., Curves and Surfaces in Euclidean Spaces, Studies in Global Geometry and Analysis, MAA Studies in Mathematics, The Mathematical Association of America, 1967.

习题 1–5

1.