1.4 曲线论的基本定理

本节我们将证明曲线的形状完全由它的曲率和挠率所确定, 这就是曲线论的基本定理, 包括惟一性和存在性定理.

定理 4.1 (**惟一性定理**) 设 $\boldsymbol{r}_1(s)$ 和 $\boldsymbol{r}_2(s)$ 是两条弧长参数曲线, 定义在同一参数 $[a,b]$ 区间上. 设 $\kappa_1(s)=\kappa_2(s)>0$, $\tau_1(s)=\tau_2(s)$, $\forall\ s\in[a,b]$. 则存在 $\mathbb{R}^3$ 的一个刚体运动 $\mathcal{T}$ 把曲线 $\boldsymbol{r}_2(s)$ 变为 $\boldsymbol{r}_1(s)$, 即 $\boldsymbol{r}_1=\mathcal{T}\circ\boldsymbol{r}_2$.

证明 设两条曲线 $\boldsymbol{r}_1(s)$, $\boldsymbol{r}_2(s)$ 在 $s=a$ 处的 Frenet 标架分别为

$$\{\boldsymbol{T}_1(a),\boldsymbol{N}_1(a),\boldsymbol{B}_1(a)\},\quad \{\boldsymbol{T}_2(a),\boldsymbol{N}_2(a),\boldsymbol{B}_2(a)\},$$

则存在 $\mathbb{R}^3$ 的一个刚体运动 $\mathcal{T}$ 把后一标架变为前一标架, 即 $\boldsymbol{r}_1(s)$ 和 $\mathcal{T}\circ\boldsymbol{r}_2(s)$ 在 $s=a$ 处的 Frenet 标架重合. 以下来证明 $\boldsymbol{r}_1(s)$ 和 $\mathcal{T}\circ\boldsymbol{r}_2(s)$ 重合, 从而 $\boldsymbol{r}_1(s)$ 和 $\boldsymbol{r}_2(s)$ 相差一个刚体运动 $\mathcal{T}$.

曲线 Frenet 标架的运动方程为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{r}}(s)=\boldsymbol{T}(s),\\ \dot{\boldsymbol{T}}=\qquad\kappa\boldsymbol{N},\\ \dot{\boldsymbol{N}}=-\kappa\boldsymbol{T}\qquad+\tau\boldsymbol{B},\\ \dot{\boldsymbol{B}}=\qquad-\tau\boldsymbol{N}.\end{cases}\tag{4.1}$$

这是一个关于向量值函数 $\boldsymbol{r},\boldsymbol{T},\boldsymbol{N},\boldsymbol{B}$ 的常微分方程组. 曲线 $\boldsymbol{r}_1(s)$ 的 Frenet 标架和 $\mathcal{T}\circ\boldsymbol{r}_2(s)$ 的 Frenet 标架是方程 (4.1) 的两组解, 它们在 $s=a$ 时重合意味着这两组解在 $s=a$ 的初值相等, 由解对初值的惟一性定理立得 $\boldsymbol{r}_1=\mathcal{T}\circ\boldsymbol{r}_2$. □

定理 4.2 (**存在性定理**) 设 $\kappa(s)$ 和 $\tau(s)$ 是定义在区间 $[a,b]$ 内的两个连续函数且 $\kappa(s)>0$. 则存在 $\mathbb{R}^3$ 的参数曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$, $s\in[a,b]$, 它以 s 为弧长参数, 以给定的函数 $k(s)$ 和 $\tau(s)$ 为它的曲率和挠率, 且这样的曲线最多差一个 $\mathbb{R}^3$ 的位置.

证明 如果满足题设条件的曲线存在, 则 Frenet 公式必成立, 这提示我们可以考虑下列以向量值函数 $\boldsymbol{r}(s),\boldsymbol{e}_1(s),\boldsymbol{e}_2(s),\boldsymbol{e}_3(s)$ 为未知量, 以已知函数

$\kappa(s)$, $\tau(s)$ 为系数的常微分方程组

$$\begin{cases} \frac{d\boldsymbol{r}(s)}{ds} = \boldsymbol{e}_1(s), \\ \frac{d}{ds}\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1(s) \\ \boldsymbol{e}_2(s) \\ \boldsymbol{e}_3(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ -\kappa(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1(s) \\ \boldsymbol{e}_2(s) \\ \boldsymbol{e}_3(s) \end{pmatrix}. \end{cases} \tag{4.2}$$

如果给定初始条件 $\{\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{T}_0, \boldsymbol{N}_0, \boldsymbol{B}_0\}$, 其中 $\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{r}(0)$, $\boldsymbol{T}_0, \boldsymbol{N}_0, \boldsymbol{B}_0$ 是 $\boldsymbol{r}_0$ 处的右手幺正标架, 由常微分方程组解的存在唯一性定理可知, 方程组 (4.2) 有惟一解 $\{\boldsymbol{r}(s); \boldsymbol{e}_1(s), \boldsymbol{e}_2(s), \boldsymbol{e}_3(s)\}$, 使得当 $s = a$ 时,

$$\{\boldsymbol{r}(a); \boldsymbol{e}_1(a), \boldsymbol{e}_2(a), \boldsymbol{e}_3(a)\} = \{\boldsymbol{r}_0; \boldsymbol{T}_0, \boldsymbol{N}_0, \boldsymbol{B}_0\},$$

下面证明方程组 (4.2) 的解 $\boldsymbol{r}(s)$ 正是定理要求的曲线.

Step I 证明 (4.2) 的解 $\{\boldsymbol{r}(s); \boldsymbol{e}_1(s), \boldsymbol{e}_2(s), \boldsymbol{e}_3(s)\}$ 是右手幺正标架族.

令 $g_{ij}(s) = \boldsymbol{e}_i(s) \cdot \boldsymbol{e}_j(s)$, $1 \leq i, j \leq 3$, 且记

$$(a_{ij}(s)) = \begin{pmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ -\kappa(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{pmatrix},$$

容易验证 $g_{ij}(s)$ 满足下列线性齐次微分方程:

$$\begin{cases} \dfrac{dg_{ij}(s)}{ds} = \dfrac{d\boldsymbol{e}_i(s)}{ds} \cdot \boldsymbol{e}_j(s) + \boldsymbol{e}_i(s) \cdot \dfrac{d\boldsymbol{e}_j(s)}{ds} \\ \qquad\qquad = \displaystyle\sum_{l=1}^{3} (a_{il}(s) g_{lj}(s) + a_{jl}(s) g_{il}(s)), \\ g_{ij}(a) = \delta_{ij}, \end{cases} \tag{4.3}$$

其中

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

另一方面, 注意到 $(a_{ij}(s))$ 是反对称矩阵, 容易验证 $g_{ij}(s) = \delta_{ij}$ 是方程组 (4.3) 的一个解, 由线性齐次微分方程组解的惟一性可知, 它就是 (4.3) 惟一的解. 所以 (4.2) 的解 $\{\boldsymbol{r}(s); \boldsymbol{e}_1(s), \boldsymbol{e}_2(s), \boldsymbol{e}_3(s)\}$ 是幺正标架族.

由于$\boldsymbol{e}_1(s),\boldsymbol{e}_2(s),\boldsymbol{e}_3(s)$构成幺正标架, 因此$(\boldsymbol{e}_1(s),\boldsymbol{e}_2(s),\boldsymbol{e}_3(s))=\pm1$. 另外$(\boldsymbol{e}_1(s),\boldsymbol{e}_2(s),\boldsymbol{e}_3(s))$是$s$的连续函数, 而且

$$(\boldsymbol{e}_1(a),\boldsymbol{e}_2(a),\boldsymbol{e}_3(a))=(\boldsymbol{T}_0,\boldsymbol{N}_0,\boldsymbol{B}_0)=1,$$

从而

$$(\boldsymbol{e}_1(s),\boldsymbol{e}_2(s),\boldsymbol{e}_3(s))=1.$$

因此, $\{\boldsymbol{r}(s);\boldsymbol{e}_1(s),\boldsymbol{e}_2(s),\boldsymbol{e}_3(s)\}$是右手幺正标架族.

Step II 证明方程组(4.2)的解$\boldsymbol{r}(s)$正是定理要求的曲线.

事实上, 方程组(4.2)的解$\boldsymbol{r}(s)=\int_{s_0}^{s}\mathrm{e}_1(\sigma)\,d\sigma+\boldsymbol{r}_0$. 显然可见$\left|\frac{d\boldsymbol{r}(s)}{ds}\right|=|\boldsymbol{e}_1(s)|=1$, 即$s$是曲线$\boldsymbol{r}(s)$的弧长. 至于曲率和挠率由公式直接验证即是. 在验证的过程中, 自然会发现标架族$\{\boldsymbol{r}(s);\boldsymbol{e}_1(s),\boldsymbol{e}_2(s),\boldsymbol{e}_3(s)\}$正是解曲线$\boldsymbol{r}(s)$的Frenet标架$\{\boldsymbol{r}(s);\boldsymbol{T}(s),\boldsymbol{N}(s),\boldsymbol{B}(s)\}$.

Step III 不难发现上述证明得到的解曲线$\boldsymbol{r}(s)$依赖于我们预设的初值条件$\{\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{T}_0,\boldsymbol{N}_0,\boldsymbol{B}_0\}$, 但不同的初值得到的两条曲线均以$s$为弧长参数, 而且具有相同的曲率$\kappa(s)$和相同的挠率$\tau(s)$, 根据定理4.1, 这两条曲线最多相差一个$\mathbb{R}^3$的刚性运动. □

注 1 曲线基本定理的证明依赖于事实: 曲线的弧长, 曲率和挠率是刚性运动的不变量.

注 2 根据基本定理, 对于给定的$\kappa(s)>0$和$\tau(s)$, 如果已求得满足某一初始条件的解曲线$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$, 那么对于其他初始条件的求解问题可化为找一个运动的问题, 这往往可以避免去解繁琐的微分方程组.

由基本定理, 我们可以用方程$\kappa=\kappa(s),\quad\tau=\tau(s)$来表示一条曲线, 这两个联立方程称为曲线的**自然方程**或**禀性方程**. 用自然方程来表示曲线的好处就在于方程的表示是唯一的, 而且不依赖空间坐标系的选取.

熟知, 圆柱螺线的曲率和挠率都是非零常数, 因此根据曲线论的基本定理知道, 曲率和挠率都是非零常数的曲线一定可以和某圆柱螺线重合. 下面我们用直接解微分方程组的方法证明这个结论, 以便进一步熟悉给定函数$\kappa(s)$和$\tau(s)$后, 如何具体地求出一条曲线以它们为曲率和挠率的方法.

【例 1】 求自然方程为

$$\kappa(s)=\frac{a}{a^2+b^2},\quad \tau(s)=\frac{b}{a^2+b^2}$$

(其中a,b都是正常数)的曲线的参数方程.

【解】 设曲线的参数方程为$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$, 则由Frenet公式知

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{T}}=\kappa\boldsymbol{N}\\ \dot{\boldsymbol{N}}=-\kappa\boldsymbol{T}+\tau\boldsymbol{B}\\ \dot{\boldsymbol{B}}=-\tau\boldsymbol{N}\end{cases}$$

其中$\kappa=\frac{a}{a^2+b^2},\quad \tau=\frac{b}{a^2+b^2}$.

将第二对s求导, 再将第一、三两式代入, 得

$$\ddot{\boldsymbol{N}}+\frac{1}{a^2+b^2}\boldsymbol{N}=0,$$

解这个二阶常微分方程得通解为

$$\boldsymbol{N}=\boldsymbol{A}\ \cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}+\boldsymbol{B}\ \sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

其中$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$是两个积分常矢量. 因为$|\boldsymbol{N}|=1$, 则

$$\cos^2\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\ \boldsymbol{A}^2+\sin^2\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\ \boldsymbol{B}^2+ \\ 2\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\ \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=1,$$

由s在定义域内的任意性得到,

$$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{B}^2=1,\quad \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=0,$$

于是我们可取$\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{e}_2$(这里$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$是空间直角坐标系中的$x$-轴和$y$-轴方向的单位向量), 从而

$$\boldsymbol{N}=\left(-\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},-\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},0\right),$$

对$\dot{\boldsymbol{T}}=\kappa\boldsymbol{N}$两边积分得

$$\boldsymbol{T}=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(-\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},0\right)+\boldsymbol{C}$$

这里 $\boldsymbol{C}$ 是积分常向量. 下面我们来确定 $\boldsymbol{C}$.

因为 $|\boldsymbol{T}|=1$, 即

$$\frac{a^2}{a^2+b^2}+\boldsymbol{C}^2+\frac{2a}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(-\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\,\boldsymbol{e}_1+\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\,\boldsymbol{e}_2\right)\cdot\boldsymbol{C}=1$$

分别令上式中 $s=0$ 及 $s=\pi\sqrt{a^2+b^2}$, 我们得到

$$\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{C}=0,$$

类似地, 再令 $s=\frac{\pi}{2}\sqrt{a^2+b^2}$ 及 $s=\frac{3\pi}{2}\sqrt{a^2+b^2}$ 又得

$$\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{C}=0,$$

且这时 $|\boldsymbol{C}|=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, 我们可令 $\boldsymbol{e}_3$ 为 z-轴正方向的单位向量, 于是

$$\boldsymbol{C}=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\,\boldsymbol{e}_3,$$

$$\boldsymbol{T}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(-a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},b\right),$$

最后由 $\dot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{T}$, 两边积分得到

$$\boldsymbol{r}(s)=\left(a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}}\right),$$

令 $t=\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}$, 则

$$\boldsymbol{r}(t)=(a\cos t,a\sin t,bt),$$

这就是我们熟知的圆柱螺线的参数方程.

习题 1–4

1. 证明: 曲线是圆(或圆弧)当且仅当 $\kappa=\text{const}(\neq 0)$, $\tau\equiv 0$.

【证明】 根据曲率和挠率都是刚性运动的不变量, 我们可设圆的参数方程为 $\boldsymbol{r}(\theta)=\{R\cos\theta,R\sin\theta,0\}$, $\quad\theta\in[0,2\pi]$. 简单计算可得 $\kappa=\frac{1}{R}$(常数), $\quad\tau\equiv 0$.

反过来, 设曲线 C 的曲率 κ 为常数 k_0, 挠率 $\tau\equiv 0$. 由 $\tau\equiv 0$ 知曲线为平面曲线, 令 $R_0=\frac{1}{k_0}$, $\bar{C}:\bar{\boldsymbol{r}}(s)=\left(R_0\cos\frac{s}{R_0},R_0\sin\frac{s}{R_0},0\right)$, $s\in[0,2R_0\pi]$, 则 $\bar{C}$ 的曲率 $\bar{\kappa}=\frac{1}{R_0}=k,\bar{\tau}\equiv 0=\tau$, 由曲线论的基本定理, C 与 $\bar{C}$ 最多相差一个 $\mathbb{R}^3$ 的刚性运动, 即曲线 C 为圆.