1.3 Frenet 公式及应用

由§1.2 我们已经知道, 在曲线 $C : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$ 上曲率不为零的点 $P_0(s_0)$ 处, 有三个两两互相垂直的单位矢量 $\boldsymbol{T}(s_0), \boldsymbol{N}(s_0), \boldsymbol{B}(s_0)$, 它们组成曲线在 P_0 点 Frenet 标架 $\{\boldsymbol{r}(s_0); \boldsymbol{T}(s_0), \boldsymbol{N}(s_0), \boldsymbol{B}(s_0)\}$. 如果曲线上各点的曲率都不为零, 让点 P_0 在曲线上变动时, 便得到沿着曲线的一族右手幺正标架, 记为 $\{\boldsymbol{r}(s); \boldsymbol{T}(s), \boldsymbol{N}(s), \boldsymbol{B}(s)\}$, 称为 **Frenet 标架(族)**, 这族标架与曲线有着紧密联系, 它的变化将反映曲线的几何性态.

研究 Frenet 标架的变化规律自然需要关注每个标架向量的导数. 因为 $\boldsymbol{T}(s), \boldsymbol{N}(s), \boldsymbol{B}(s)$ 是三个线性无关的向量, 所以其导向量 $\dot{\boldsymbol{T}}, \dot{\boldsymbol{N}}, \dot{\boldsymbol{B}}$ 可以用它们线性表示. 下面我们来推导这些线性表示的具体表达式.

首先, 由曲率和挠率的定义, 我们已经知道

$$\dot{\boldsymbol{T}} = \kappa \boldsymbol{N}, \qquad \dot{\boldsymbol{B}} = -\tau \boldsymbol{N},$$

其中 κ 和 τ 是曲线的曲率和挠率.

现在对 $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{T}$ 两边关于弧长 s 求导, 并利用上面两式便得

$$\dot{\boldsymbol{N}} = -\kappa \boldsymbol{T} + \tau \boldsymbol{B}.$$

于是我们得到下述公式

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{T}} = & \kappa \boldsymbol{N}, \\ \dot{\boldsymbol{N}} = -\kappa \boldsymbol{T} & + \tau \boldsymbol{B}, \\ \dot{\boldsymbol{B}} = & -\tau \boldsymbol{N}. \end{cases} \tag{3.1}$$

公式 (3.1) 写成矩阵的形式如下

$$\begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{T}} \\ \dot{\boldsymbol{N}} \\ \dot{\boldsymbol{B}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{T} \\ \boldsymbol{N} \\ \boldsymbol{B} \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

这组公式是由法国数学家 Frenet 于 1847 年发现的, 通常称为 **Frenet 公式**. 由于法国数学家 Serret 于 1851 年也独立发现这组公式, 所以也有 **Frenet-Serret 公式**的说法. 随着时间的推移, 人们越来越认识到这组公式是曲线论的灵魂, 它是研究曲线几何性质的强有力的工具.

下面举例说明如何应用Frenet公式去导出某些简单的几何性质.

【例 1】 证明：如果曲率处处不为零的曲线的所有密切平面都经过一定点, 则此曲线为平面曲线.

【证明】 设曲线的自然参数方程为$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$, 并设密切平面上流动点的径矢为$\boldsymbol{\rho}$, 则密切平面方程为

$$(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{r}(s)) \cdot \boldsymbol{B} = 0.$$

由题设密切平面过定点, 不失一般性设定点为坐标原点, 则

$$\boldsymbol{r}(s) \cdot \boldsymbol{B} = 0, \tag{3.3}$$

两边关于弧长s求导, 得

$$\tau(s)\boldsymbol{r}(s) \cdot \boldsymbol{N} = 0. \tag{3.4}$$

反设曲线在某点$P(s_0)$处$\tau(s_0) \neq 0$, 那么利用τ的连续性, 必存在一个含s_0的开区间$(s_0 - \varepsilon,\ s_0 + \varepsilon)$满足下述性质：对于$\forall\ s \in (s_0 - \varepsilon,\ s_0 + \varepsilon)$, $\tau(s) \neq 0$. 则由(3.4)式$\boldsymbol{r}(s) \perp \boldsymbol{N}$, 而由(3.3)式$\boldsymbol{r}(s) \perp \boldsymbol{B}$, 所以$\boldsymbol{r}(s) \parallel \boldsymbol{T}$, 即存在可微分函数$\lambda(s)$, $s \in (s_0 - \varepsilon,\ s_0 + \varepsilon)$, 使得

$$\boldsymbol{r}(s) = \lambda(s)\boldsymbol{T}(s). \tag{3.5}$$

(3.5)式两边对s求导, 得

$$\boldsymbol{T} = \frac{d\lambda(s)}{ds}\boldsymbol{T} + \lambda(s)\kappa(s)\boldsymbol{N}, \tag{3.6}$$

由于$\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}$是线性无关的两个单位向量, 比较(3.6)式两边知

$$\frac{d\lambda(s)}{ds} = 1, \quad \lambda(s)\kappa(s) = 0,$$

而由题设$\kappa(s) > 0$, 则在整个开区间$(s_0 - \varepsilon,\ s_0 + \varepsilon)$上有$\lambda(s) = 0$, 这与$\frac{d\lambda(s)}{ds} = 1$矛盾. 这一矛盾说明曲线的挠率$\tau(s) \equiv 0$, 即曲线为平面曲线. □

【例 2】 设$\boldsymbol{r}(s)$是球面上的一条弧长参数曲线, 证明: $\boldsymbol{r}$在Frenet标架下的分解式$\boldsymbol{r}(s) = -\frac{1}{\kappa}\boldsymbol{N} - \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\kappa}\right)\frac{1}{\tau}\boldsymbol{B}$.

【证明】 设 $\boldsymbol{r} = a\boldsymbol{T} + b\boldsymbol{N} + c\boldsymbol{B}$, 其中 a, b, c 是待定系数. 因 $\boldsymbol{r}(s)$ 是球面曲线, 故有

$$|\boldsymbol{r}(s)|^2 = R^2 \ (R\text{为球面半径}).$$

两边关于弧长求导, 并由 Frenet 公式得

$$\boldsymbol{r} \cdot \dot{\boldsymbol{r}} = 0 \quad \text{或} \quad a = \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{T} = 0.$$

再对上式两边求导, 结合 Frenet 公式得

$$\boldsymbol{T}^2 + \kappa \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{N} = 0.$$

因此, $b = \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{N} = -\frac{1}{\kappa}$. 最后对等式 $-\frac{1}{\kappa} = \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{N}$ 两边求导, 再次利用 Frenet 公式得

$$-\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\kappa}\right) = \tau \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{B}.$$

于是 $c = \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{B} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\kappa}\right)\frac{1}{\tau}$. □

从上述例子可以初步看到, 应用 Frenet 公式解决这类问题的大致思路如下:

(1) 将题设几何条件代数化;

(2) 微分代数化表达式, 并将 Frenet 公式和几何条件代入;

(3) 解释所得结果的几何意义;

(4) 重复上述三步, 直到得出结论为止.

本节最后, 作为 Frenet 公式的重要应用之一, 我们来讨论曲线在正则点邻近的性质. 基本思路是: 取正则点处的 Frenet 标架作为新坐标系, 然后将曲线(在正则点邻近的部分)用新坐标系重新表示, 并得到原曲线的近似曲线, 最后通过近似曲线了解原曲线的几何性质. 下面是具体的实施过程.

设 $C : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$ 是一条正则弧长参数曲线. 不失一般性, 我们在 $s = 0$ 点邻近将 $\boldsymbol{r}(s)$ 按(有限阶) Taylor 展开:

$$\boldsymbol{r}(s) = \boldsymbol{r}(0) + s\dot{\boldsymbol{r}}(0) + \frac{s^2}{2}\ddot{\boldsymbol{r}}(0) + \frac{s^3}{6}\dddot{\boldsymbol{r}}(0) + \boldsymbol{R},$$

这里 $\lim\limits_{s\to 0}\boldsymbol{R}/s^3=\boldsymbol{0}$. 由于 $\dot{\boldsymbol{r}}(0)=\boldsymbol{T}(0), \ddot{\boldsymbol{r}}(0)=\kappa(0)\boldsymbol{N}(0)$ 及 $\dddot{\boldsymbol{r}}(0)=\kappa'\boldsymbol{N}(0)-\kappa^2(0)\boldsymbol{T}(0)+\kappa(0)\tau(0)\boldsymbol{B}(0)$, 我们得到

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{r}(0)=&\left(s-\frac{k^2(0)s^3}{6}\right)\boldsymbol{T}(0)+\left(\frac{k(0)s^2}{2}+\frac{k'(0)s^3}{6}\right)\boldsymbol{N}(0)\\&+\frac{k(0)\tau(0)s^3}{6}\boldsymbol{B}(0)+\boldsymbol{R}.\end{aligned}$$

现在取 $\{P_0(s=0);\boldsymbol{T}(0),\boldsymbol{N}(0),\boldsymbol{B}(0)\}$ 作为新坐标系, 则曲线 C 上 P_0 的邻近点的新坐标由下式给出:

$$\begin{cases}x(s)=s-\frac{\kappa^2(0)}{6}s^3+\boldsymbol{R}_x,\\ y(s)=\frac{\kappa(0)}{2}s^2+\frac{\kappa'(0)s^3}{6}+\boldsymbol{R}_y,\\ z(s)=\frac{\kappa(0)\tau(0)}{6}s^3+\boldsymbol{R}_z,\end{cases}\tag{3.7}$$

这里 $\boldsymbol{R}=(\boldsymbol{R}_x,\boldsymbol{R}_y,\boldsymbol{R}_z)$, (3.7) 式称为曲线 C 在 $s=0$ 的一个邻域中的**局部规范形式**, 或称为 **Bouquet 公式**.

假设 $\kappa(0)\neq 0, \tau(0)\neq 0$, 我们只取 (3.7) 中各式的第一项, 就得到 $s=0$ 邻近和原曲线 C 近似的曲线 $C^*:\boldsymbol{r}^*(s)=(x^*(s),y^*(s),z^*(s))$:

$$\begin{cases}x^*(s)=s,\\ y^*(s)=\frac{\kappa(0)}{2}s^2,\\ z^*(s)=\frac{\kappa(0)\tau(0)}{6}s^3,\end{cases}\tag{3.8}$$

(注意这里 s 未必是 C^* 的弧长参数) 容易证明 C 与 C^* 在 $s=0$ 处具有相同的曲率和挠率及相同的 Frenet 标架. 因此原曲线 C 在 $s=0$ 处的性状可以用这条近似曲线来模拟. 为此, 我们将近似曲线 C^* 分别投影到三个坐标平面上:

C^* 在密切平面上的投影曲线为一条抛物线

$$\begin{cases}x^*(s)=s,\\ y^*(s)=\frac{k(0)}{2}s^2,\end{cases}\qquad \text{i.e.}\quad y^*=\frac{k(0)}{2}x^{*2},$$

C^* 在法平面上的投影曲线为一条半立方抛物线

$$\begin{cases}y^*(s)=\frac{k(0)}{2}s^2,\\ z^*(s)=\frac{k(0)\tau(0)}{6}s^3,\end{cases}\qquad \text{i.e.}\quad y^{*3}=\frac{9}{2}\frac{k(0)}{\tau^2(0)}z^{*2},$$

C^* 在从切平面上的投影曲线为一条三次抛物线

$$\begin{cases} x^*(s) = s, \\ z^*(s) = \frac{k(0)\tau(0)}{6}s^3, \end{cases} \qquad \text{i.e.} \quad z^* = \frac{1}{6}k(0)\tau(0)x^{*3}.$$

从以上关于曲线 C 的近似曲线的三个投影曲线的讨论, 我们得出关于原曲线 C 的如下结论:

(1) 主法向量总是指向曲线的凹侧; 而且在正则点的充分小邻域, 曲线总穿过法平面和密切平面, 但从不穿过从切平面, 即完全落在从切平面指向 $\boldsymbol{N}$ 的一侧;

(2) 挠率符号的几何意义.

如果我们规定 $\boldsymbol{B}$ 所指方向是密切平面的正侧, 那么若 $\tau(0) > 0$, 曲线沿弧长增加方向经过 $s = 0$ 点时, 由密切平面负侧穿到正侧; 若 $\tau(0) < 0$, 曲线沿弧长增加方向经过 $s = 0$ 点时, 由密切平面正侧穿到负侧. 由此可见, 当 $\tau(0) > 0$ 时, 曲线在 $s = 0$ 点附近类似于右旋螺线, 称为是**右旋的**, 当 $\tau(0) < 0$ 时, 曲线在 $s = 0$ 点附近类似于左旋螺线, 称为是**左旋的**. 所以挠率的符号决定曲线在考察点处是右旋的还是左旋的.

(3) 密切平面的几何意义.

曲线在 $s = 0$ 处的密切平面就是 $s = 0$ 处的切线与邻近点 $\boldsymbol{r}(s)$ 所决定的平面(当 $s \to 0$ 时)的极限位置. 事实上, 由点 $\boldsymbol{r}(s)$ 及 $s = 0$ 处的切线所决定的平面方程的法矢量为 $\boldsymbol{T}(0) \times (\boldsymbol{r}(s) - \boldsymbol{r}(0)) = (0, -z(s), y(s))$, 于是相应的平面方程为

$$-Y \cdot z(s) + Z \cdot y(s) = 0 \quad \text{或} \quad Z = \lambda Y,$$

其中

$$\lambda = \frac{z(s)}{y(s)} = \frac{\frac{\kappa\tau}{6}s^3 + \cdots}{\frac{\kappa}{2}s^2 + \frac{\kappa'}{6}s^3 + \cdots}.$$

当 $s \to 0$ 时, $\lambda \to 0$. 于是所决定的平面趋近于 $Z = 0$, 即密切平面.

(4) 由于曲线在正则点邻近与近似曲线具有相同的 Frenet 标架, 而近似曲线完全由原曲线的曲率 $\kappa(s)$ 和挠率 $\tau(s)$ 所决定, 所以对了解曲线而言, $\kappa(s)$ 与 $\tau(s)$ 差不多决定了曲线的全部性质. 下一节将证明此事.

习题 1–3

1. 证明以下结论:

(1) 若曲线的所有切线过定点, 则曲线是直线.

(2) 若曲线的密切平面处处平行, 则曲线是平面曲线.

(3) 若曲线的所有法平面过定点, 则曲线是球面曲线.

2. 设在两条曲线 C_1, C_2 的点之间建立了一一对应关系, 证明：

(1) 若它们在对应点的切线平行, 则对应点的主法线及副法线也分别平行.

(2) 若它们在对应点的主法线平行, 则对应点的切线作成固定角.

(3) 若 C_1, C_2 作为挠曲线在对应点的副法线平行, 则它们在对应点的切线和主法线也分别平行.

3. 证明: 曲线在一点和它的近似曲线有相同的曲率和挠率.

4. 设曲线 $\boldsymbol{r}(s)$ 的主法向量和副法向量分别是 $\boldsymbol{N}(s)$, $\boldsymbol{B}(s)$. 将 $\boldsymbol{N}(s)$, $\boldsymbol{B}(s)$ 看成两条球面曲线, 求它们的曲率和挠率.

5. 设 $\{\boldsymbol{r}(t); \boldsymbol{e}_1(t), \boldsymbol{e}_2(t), \boldsymbol{e}_3(t)\}$ 是沿曲线 $\boldsymbol{r}(t)$ 定义的一个幺正标架场, 假定

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{e}_i(t) = \sum_{j=1}^{3} \lambda_{ij}(t)\boldsymbol{e}_j(t), \quad 1 \le i \le 3.$$

证明: $\lambda_{ij}(t) + \lambda_{ji}(t) = 0$.