1.2 Frenet标架 曲率和挠率

设$C:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$是弧长参数化曲线, $P_0(s=s_0)\in C$. 令$\boldsymbol{T}(s_0)=\dot{\boldsymbol{r}}(s_0)$, 则$\boldsymbol{T}(s_0)$是曲线$C$在$P_0$点处的单位切向量.

由于s是弧长参数, 所以$|\dot{\boldsymbol{r}}(s)|\equiv 1$, 即有$\dot{\boldsymbol{r}}(s)\cdot\dot{\boldsymbol{r}}(s)\equiv 1$, 两边关于弧长$s$求导得, $\dot{\boldsymbol{r}}(s)\cdot\ddot{\boldsymbol{r}}(s)=0$, 因而$\ddot{\boldsymbol{r}}(s)\perp\dot{\boldsymbol{r}}(s)$. 假定$|\ddot{\boldsymbol{r}}(s_0)|\neq 0$, 则令

$$\boldsymbol{N}(s_0)=\frac{\ddot{\boldsymbol{r}}(s_0)}{|\ddot{\boldsymbol{r}}(s_0)|},$$
$$\boldsymbol{B}(s_0)=\boldsymbol{T}(s_0)\times\boldsymbol{N}(s_0),$$

显然, $\boldsymbol{T}(s_0),\boldsymbol{N}(s_0),\boldsymbol{B}(s_0)$是互相垂直的单位向量, 而且按照$\boldsymbol{T},\boldsymbol{N},\boldsymbol{B}$的顺序构成右手系. 这样我们就得到了曲线$C$在$P_0$点的一个右手幺正标架, 记作$\{\boldsymbol{r}(s_0);\boldsymbol{T}(s_0),\boldsymbol{N}(s_0),\boldsymbol{B}(s_0)\}$, 它与表示曲线的笛卡儿直角坐标系的选取无关, 也不受曲线作保持定向的容许参数变换的影响, 称为曲线C在P_0点的**Frenet标架**.

分别称$\boldsymbol{T}(s_0),\boldsymbol{N}(s_0),\boldsymbol{B}(s_0)$为曲线$C$在$P_0$点的**切向量、主法向量、副法向量**. 以它们作为法向量的平面分别称为曲线C在P_0点的**法平面、从切平面、密切平面**, 而以它们作为方向矢量的直线分别称为曲线C在P_0点的**切线、主法线、副法线**(如图所示).

下面开始讨论曲线的曲率和挠率.

设$C:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$是弧长参数曲线, 称$|\dot{\boldsymbol{T}}(s)|$为曲线$C$的**曲率**, 记为$\kappa(s)=|\dot{\boldsymbol{T}}(s)|=|\ddot{\boldsymbol{r}}(s)|$, 并称$\ddot{\boldsymbol{r}}(s)$为$C$的**曲率向量**, 当$\kappa(s)\neq 0$时, 称$1/\kappa(s)$为曲线的**曲率半径**.

为了解释曲率的几何意义, 任取点$P(s)\in C$及其邻近点$Q(s+\Delta s)$, P和Q点处的单位切向量分别为$\boldsymbol{T}(s)=\dot{\boldsymbol{r}}(s)$和$\boldsymbol{T}(s+\Delta s)=\dot{\boldsymbol{r}}(s+\Delta s)$, 它们的夹角设为$\Delta\theta$, 则$|\boldsymbol{T}(s+\Delta s)-\boldsymbol{T}(s)|=2\sin\frac{\Delta\theta}{2}$, 于是

$$\frac{|\boldsymbol{T}(s+\Delta s)-\boldsymbol{T}(s)|}{|\Delta s|}=\frac{2\sin\frac{\Delta\theta}{2}}{|\Delta s|}=\frac{\sin\frac{\Delta\theta}{2}}{|\frac{\Delta\theta}{2}|}\cdot\frac{|\Delta\theta|}{|\Delta s|},$$

故

$$\kappa(s)=|\dot{\boldsymbol{T}}(s)|=\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\boldsymbol{T}(s+\Delta s)-\boldsymbol{T}(s)}{\Delta s}\right|=\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\theta}{\Delta s}\right|,$$

这表明曲线在一点处的曲率等于此点与邻近点的切线向量之间的夹角关于弧长的变化率, 它反映了曲线的弯曲程度. 如果曲线在某点处的曲率愈大, 表示曲线在该点附近切线方向改变的愈快, 因此曲线在该点的弯曲程度愈大.

定理 2.1 曲线为直线的充分必要条件是曲率$\kappa\equiv 0$.

证明 若曲线$C:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$为直线, 设其弧长参数方程为$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{a}s$, 其中$\boldsymbol{r}_0$为常矢量, $\boldsymbol{a}$为直线的单位方向矢量. 于是$\boldsymbol{T}(s)=\boldsymbol{a}$, 且$\kappa=|\dot{\boldsymbol{T}}(s)|\equiv 0$.

反之, 若有$\kappa\equiv 0$, 则$\boldsymbol{T}(s)$为常矢量, 记为$\boldsymbol{T}_0$. 对$\boldsymbol{T}(s)=\dot{\boldsymbol{r}}(s)$两边关于弧长$s$积分得$\boldsymbol{r}(s)=\int\boldsymbol{T}(s)\,ds=\boldsymbol{T}_0 s+\boldsymbol{r}_0$, 这正是直线的方程. □

空间曲线不但要弯曲, 而且还要扭曲, 即要离开它的密切平面. 为了能刻画这一扭曲程度, 等价于去研究密切平面的法矢量(即曲线的副法矢量)关于弧长的变化率. 为此我们先给出如下引理.

引理 2.2 $\dot{\boldsymbol{B}}\parallel\boldsymbol{N}$.

证明 一方面, 因为$\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{T}=0$, 两边关于弧长$s$求导, 同时注意到$\dot{\boldsymbol{T}}=\kappa\boldsymbol{N}$便得$\dot{\boldsymbol{B}}\cdot\boldsymbol{T}=0$, 即$\dot{\boldsymbol{B}}$垂直于$\boldsymbol{T}$.

另一方面由于$|\boldsymbol{B}|=1$, 两边关于弧长s求导便得$\dot{\boldsymbol{B}}\cdot\boldsymbol{B}=0$, 即$\dot{\boldsymbol{B}}$垂直于$\boldsymbol{B}$. 这两方面说明$\dot{\boldsymbol{B}}\parallel(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{T})=\boldsymbol{N}$. □

设$\kappa(s)\neq 0$, 由$\dot{\boldsymbol{B}}(s)=-\tau(s)\boldsymbol{N}(s)$(负号是为了以后运算方便而引进的)所确定的函数$\tau(s)$称为曲线$C$在$s$处的**挠率**, 即$\tau(s)=-\dot{\boldsymbol{B}}(s)\cdot\boldsymbol{N}(s)$. 当$\tau(s)\neq 0$时, 它的倒数$\frac{1}{\tau(s)}$称为**挠率半径**.

由挠率的定义知$|\tau(s)|=|\dot{\boldsymbol{B}}(s)|$, 因此挠率的绝对值表示曲线的副法向量关于弧长的变化率, 换言之, 曲线的挠率就绝对值而言其几何意义是反映了曲线离开密切平面的快慢, 即曲线的扭曲程度, 正负号反映曲线的扭曲方向.

定理 2.3 曲率处处不为零的曲线为平面曲线的充分必要条件是挠率$\tau(s)\equiv 0$. 进而, 曲线为平面曲线当且仅当曲线的密切平面固定为一个.

证明 设曲线$C:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$位于一平面上, 我们断言$\boldsymbol{B}(s)$为常矢量. 事实上, 设$\boldsymbol{r}(s)$所在平面的法向量为$\boldsymbol{B}_0$, 则有$(\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{r}(0))\cdot\boldsymbol{B}_0=0$. 两边关于$s$求导后得到$\boldsymbol{T}(s)\cdot\boldsymbol{B}_0=0$, 再求导又得$\kappa(s)\boldsymbol{N}(s)\cdot\boldsymbol{B}_0=0$, 注意到$\kappa(s)\neq 0$, 故$\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{N}$都与$\boldsymbol{B}_0$垂直, 所以$\boldsymbol{B}(s)=\boldsymbol{N}(s)\times\boldsymbol{T}(s)$是与常向量$\boldsymbol{B}_0$平行的单位向量. 最后由$\boldsymbol{B}(s)$是常向量易见$\tau(s)=-\dot{\boldsymbol{B}}\cdot\boldsymbol{N}\equiv 0$.

反之, 如果$\tau(s)\equiv 0$, 即$\dot{\boldsymbol{B}}\cdot\boldsymbol{N}=0$, 而$\dot{\boldsymbol{B}}$共线于$\boldsymbol{N}$, 所以$\dot{\boldsymbol{B}}(s)\equiv 0$或$\boldsymbol{B}(s)$为常矢量, 记为$\boldsymbol{B}_0$. 于是可直接验证$\frac{d}{ds}(\boldsymbol{r}(s)\cdot\boldsymbol{B}_0)=0$, 即$\boldsymbol{r}(s)\cdot\boldsymbol{B}_0=$常数, 这说明曲线$C$上的点满足一平面的方程, 即$C$为平面曲线. □

定理 2.4 曲率和挠率都是曲线的几何量.

证明 由于曲线的弧长s与曲线的参数选取无关, 所以曲率$\kappa(s)=|\dot{\boldsymbol{T}}(s)|=|\ddot{\boldsymbol{r}}(s)|$及挠率$\tau(s)=-\dot{\boldsymbol{B}}(s)\cdot\boldsymbol{N}(s)$都与曲线的参数选取无关. 另外, 由于坐标变换保持向量的夹角和模长, 因此曲率和挠率也是刚性运动不变量. □

上述讨论过程(及今后)都用到一种**求导戏法**: 如果向量$\boldsymbol{a}(s)$具有固定长度, 则对$\boldsymbol{a}(s)\cdot\boldsymbol{a}(s)=c$(常数)两边求导后就得到$\frac{d\boldsymbol{a}(s)}{ds}\cdot\boldsymbol{a}(s)=0$, 即$\frac{d\boldsymbol{a}(s)}{ds}$与$\boldsymbol{a}(s)$正交. 特别对于Frenet标架向量, 有$\dot{\boldsymbol{T}}\perp\boldsymbol{T}$, $\dot{\boldsymbol{N}}\perp\boldsymbol{N}$, $\dot{\boldsymbol{B}}\perp\boldsymbol{B}$. 类似地, 求导戏法对于正交向量也经常沿用, 如对Frenet标架向量, 容易得到$\dot{\boldsymbol{T}}\cdot\boldsymbol{N}+\boldsymbol{T}\cdot\dot{\boldsymbol{N}}=0$等. 这样的戏法当然算不上什么发明创造, 但是通过求导寻找解决问题的途径正是微分几何中"微分"二字的基本含义, 希望大家都能记住这样的戏法并反复实践, 任何时候你都有意想不到的收获.

总上所述, 对弧长参数曲线, 我们做出了曲线的一个辅助图形—Frenet 标架, 利用它解析地定义了曲线的两个几何量—曲率和挠率, 其几何意义在于能分别反映曲线的弯曲和扭曲程度. 对于许多具体的参数曲线, 化为以弧长作为参数有着具体计算上困难, 因此, 对非弧长参数曲线, 推导出一套计算 Frenet 标架及曲率和挠率的计算公式有迫切的现实意义. 我们将具体的推导过程留给读者作为练习, 直接将弧长参数与非弧长参数表示下关于曲线 Frenet 标架的三个向量 $\boldsymbol{T},\boldsymbol{N},\boldsymbol{B}$ 及曲率挠率的计算公式总结在如下表格中:

$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ s 为弧长参数	$\boldsymbol{T}(s)=\dot{\boldsymbol{r}}(s)$ $\boldsymbol{N}(s)=\ddot{\boldsymbol{r}}(s)/\lvert\ddot{\boldsymbol{r}}(s)\rvert$ $\boldsymbol{B}(s)=\boldsymbol{T}(s)\times\boldsymbol{N}(s)$	$\kappa(s)=\lvert\dot{\boldsymbol{T}}(s)\rvert=\lvert\ddot{\boldsymbol{r}}(s)\rvert$ $\tau(s)=\dfrac{(\dot{\boldsymbol{r}}(s),\ddot{\boldsymbol{r}}(s),\dddot{\boldsymbol{r}}(s))}{(\ddot{\boldsymbol{r}}(s))^2}$
$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ t 为一般参数	$\boldsymbol{T}(t)=\boldsymbol{r}'(t)/\lvert\boldsymbol{r}'(t)\rvert$ $\boldsymbol{N}(t)=\boldsymbol{B}(t)\times\boldsymbol{T}(t)$ $\boldsymbol{B}(t)=\dfrac{\boldsymbol{r}'(t)\times\boldsymbol{r}''(t)}{\lvert\boldsymbol{r}'(t)\times\boldsymbol{r}''(t)\rvert}$	$\kappa(t)=\dfrac{\lvert\boldsymbol{r}'(t)\times\boldsymbol{r}''(t)\rvert}{\lvert\boldsymbol{r}'(t)\rvert^3}$ $\tau(t)=\dfrac{(\boldsymbol{r}'(t),\boldsymbol{r}''(t),\boldsymbol{r}'''(t))}{(\boldsymbol{r}'(t)\times\boldsymbol{r}''(t))^2}$

【例 1】 分别求椭圆 $C:\boldsymbol{r}(t)=(a\cos t,b\sin t,0)$ $(a>b>0)$ 在长轴顶点 $A(a,0,0)$ 及短轴顶点 $B(0,b,0)$ 处的曲率和挠率.

【解】 注意到点 A 和点 B 对应的参数值分别为 $t=0,\ t=\pi/2$, 直接计算得到

$$|\boldsymbol{r}'(0)|=b,\quad |\boldsymbol{r}'(\pi/2)|=a,\quad |\boldsymbol{r}'(t)\times\boldsymbol{r}''(t)|=ab.$$

于是 A 点处的曲率 $\kappa_A=\frac{ab}{b^3}$, B 点处的曲率 $\kappa_B=\frac{ab}{a^3}$, 显然 $\kappa_A>\kappa_B$, 这正说明椭圆 C 在长轴顶点处的弯曲程度比 C 在短轴顶点处的弯曲程度高, 换句话说, 椭圆 C 在短轴顶点邻近比长轴顶点邻近平坦.

至于挠率, 因为曲线 C 是平面曲线, 其挠率处处为 0.

特别地, 若 $a=b$, 即 C 是圆, 这时, 容易验证圆上每一点处的曲率都相等, 且等于半径的倒数, 这一方面表明圆在其上每一点处的弯曲程度都相同, 同时也表明半径愈大, 弯曲程度愈小. 这些事实的几何直观是不言而语的. □

【例 2】 求圆柱螺线 $\boldsymbol{r}(t)=(a\cos t,a\sin t,bt)$ 的曲率和挠率, 这里 $a,b>0$.

【解】 直接计算得到

$$|\boldsymbol{r}'(t)| = \sqrt{a^2+b^2}, \quad |\boldsymbol{r}'(t)\times\boldsymbol{r}''(t)| = a\sqrt{a^2+b^2},$$
$$(\boldsymbol{r}'(t), \boldsymbol{r}''(t), \boldsymbol{r}'''(t)) = a^2 b,$$

代入曲率和挠率的计算公式立即得

$$\kappa(t) = \frac{a}{a^2+b^2}, \qquad \tau(t) = \frac{b}{a^2+b^2}.$$

由此可见圆柱螺线的曲率和挠率均为常数, 今后将证明其逆命题也成立, 即曲率和挠率均为非零常数的曲线一定是圆柱螺线. □

【例 3】 求曲线 $\boldsymbol{r}(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t, \cos 2t)$ 的 Frenet 标架及曲率和挠率, 这里 $0 < t < \pi/2$.

【解】 直接计算得到 $|\boldsymbol{r}'(t)| = \frac{5}{2}\sin 2t$, 可见 t 不是弧长参数, 所以将 $\boldsymbol{r}'(t)$ 单位化后得到

$$\boldsymbol{T}(t) = \boldsymbol{r}'(t)/|\boldsymbol{r}'(t)| = \left(-\frac{3}{5}\cos t, \frac{3}{5}\sin t, -\frac{4}{5}\right),$$

而

$$\boldsymbol{N}(t) = \frac{\ddot{\boldsymbol{r}}(s)}{|\ddot{\boldsymbol{r}}(s)|} = \frac{\dot{\boldsymbol{T}}(s)}{|\dot{\boldsymbol{T}}(s)|} = \frac{\frac{d\boldsymbol{T}(t)}{dt}\frac{dt}{ds}}{\left|\frac{d\boldsymbol{T}(t)}{dt}\frac{dt}{ds}\right|} = (\sin t, \cos t, 0),$$

所以

$$\boldsymbol{B}(t) = \boldsymbol{T}(t)\times\boldsymbol{N}(t) = \left(\frac{4}{5}\cos t, -\frac{4}{5}\sin t, -\frac{3}{5}\right).$$

于是曲线 $\boldsymbol{r}(t)$ 的曲率

$$\kappa(t) = \left|\frac{d\boldsymbol{T}(s)}{ds}\right| = \left|\frac{d\boldsymbol{T}(t)}{dt}\right|\cdot\left|\frac{dt}{ds}\right| = \frac{\left|\frac{d\boldsymbol{T}}{dt}\right|}{\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|} = \frac{6}{25\sin 2t}.$$

为了计算挠率, 由定义 $\tau = -\frac{d\boldsymbol{B}}{ds}\cdot\boldsymbol{N}$, 而 $\frac{d\boldsymbol{B}}{ds} = \frac{d\boldsymbol{B}}{dt}\cdot\frac{dt}{ds}$, 故

$$\tau(t) = -\frac{\frac{d\boldsymbol{B}}{dt}\cdot\boldsymbol{N}}{\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|} = \frac{8}{25\sin 2t}.$$

□

习题 1–2

1. 求正则曲线 $\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ 在其上任意点处的切线和法平面方程.
2. 证明: 曲线为球面曲线的充要条件是它的所有法平面都通过定点.
3. 求曲线 $x=t\sin t, y=t\cos t, z=te^t$ 在原点的 Frenet 标架.